

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ

1.1 Γενικά

Η Μέθοδος των μετακινήσεων (displacement method ή stiffness method), ως μέθοδος επίλυσης υπερστατικών γραμμικών φορέων, συγκαταλέγεται στις κλασικές μεθόδους επίλυσης. Εισάγει ως άγνωστα μεγέθη τις “μετακινήσεις”, δηλαδή τις μετατοπίσεις u_i και v_i κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, και τη στροφή ϕ_i , ορισμένων διακεκριμένων σημείων (i) του γραμμικού φορέα που ονομάζονται κόμβοι, σε αντίθεση με τη Μέθοδο των Δυνάμεων όπου ως άγνωστα υπεράριθμα μεγέθη εισάγονται “δυνάμεις”. Ο γραμμικός φορέας θεωρείται ως ένα πλέγμα ενός πεπερασμένου αριθμού δομικών στοιχείων (σ), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους στους κόμβους, ή με το έδαφος στους κόμβους εδάφους (Σχήματα 1-1 και 1-2). Τα εντασιακά μεγέθη στα άκρα των δομικών στοιχείων εκφράζονται συναρτήσει των “μετατοπίσεων”, ο υπολογισμός των οποίων επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλων συνθηκών ισορροπίας και κινητότητας.

Ιδιαίτερες παραλλαγές της Μεθόδου των Μετακινήσεων:

- Μέθοδος των γωνιών στροφής-Εισάγει ως αγνώστους, μόνο τις γωνίες στροφής των εσωτερικών κόμβων ($u_i=0$, και $v_i=0$). Προϋποθέτει άπειρη δυστένεια όλων των δομικών στοιχείων που απαρτίζουν τον φορέα ($EA=\infty$). Εφαρμόζεται σε πάγιους φορείς δηλαδή σε φορείς των οποίων οι εσωτερικοί κόμβοι είναι αμετακίνητοι.
- Η γενική συνδυαστική μέθοδος-συνδυασμός μεθόδου δυνάμεων και μεθόδου μετακινήσεων. (Ιδιαίτερα επίπονη απ’ ότι η κάθε μέθοδος χωριστά)
- Η επαναληπτική (θαμιστική) μέθοδος ή μέθοδος CROSS από τον Hardy Cross (USA)-1930 ή αργότερα (1947) ως μέθοδος KANI (Germany).

Νεότερες εξελίξεις στη Στατική:

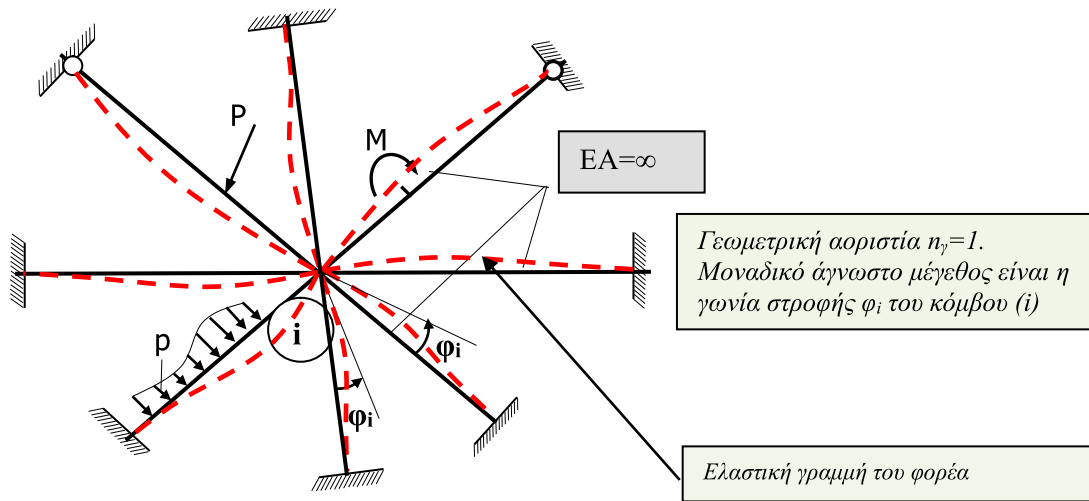
Από το 1950, με την εμφάνιση των υπολογιστών και τη δυνατότητα προγραμματισμού, παράλληλα με την κλασική Στατική υιοθετήθηκε η μητρική διατύπωση των μεθόδων, δυνάμεων και μετακινήσεων (Μητρική Στατική).

Από το 1960 χρησιμοποιείται πλέον η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method) για τον υπολογισμό σύνθετων μοντέλων (δίσκων, πλακών, κελυφών).

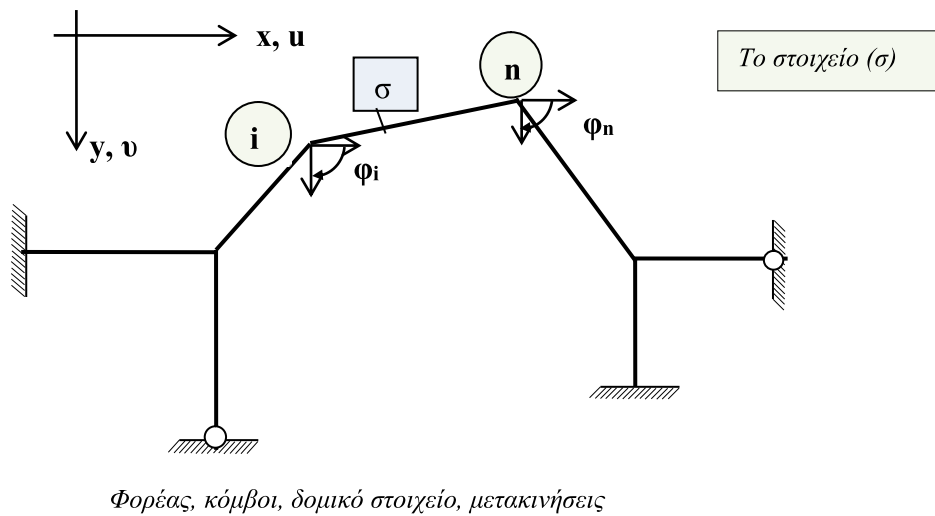
Ο δομοστατικός μηχανικός στην πράξη εφαρμόζει (συνήθως ως απλός χρήστης) σχεδόν αποκλειστικά αριθμητικές μεθόδους ανάλυσης οι οποίες κατά κανόνα είναι μητρικές διατυπώσεις της μεθόδου στιβαρότητας (stiffness method), μιας κατάλληλης για προγραμματισμό παραλλαγής της κλασικής μεθόδου μετακινήσεων.

Η μέθοδος των μετακινήσεων πλεονεκτεί έναντι της μεθόδου των δυνάμεων, κυρίως σε φορείς με μεγάλο βαθμό στατικής αοριστίας, ιδιαίτερα σε πάγιους φορείς. Η ευκολία απορρέει από το γεγονός ότι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων επιτρέπει την εύκολη κωδικοποίησή της προς χρήση σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Ιδανική περίπτωση αποτελεί ο παρακάτω φορέας του Σχ. 1.1 μορφής «τροχού» με άπειρη δυστένεια ($EA=\infty$) όλων των στοιχείων του. Ενώ ο φορέας στατικά είναι πολλαπλώς υπερστατικός, γεωμετρικά (κινηματικά) είναι μια φορά αόριστος. Αυτό σημαίνει πως το μοναδικό άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος που πρέπει να προσδιοριστεί μέσω κατάλληλης συνθήκης ισοροπίας του κόμβου (i) είναι η γωνία στροφής (φ_i).



Σχ. 1.1: Πάγιος φορέας – γεωμετρική αοριστία



Σχ. 1.2: Διακριτοποίηση του φορέα-συμβολισμοί

Οι δύο μέθοδοι, ΜΔ και ΜΜ είναι δικά αντίστοιχες (δυνάμεις και μετακινήσεις συνδέονται εργικά) και η μια συμπληρώνει την άλλη. Γενικά, η μέθοδος των δυνάμεων βασίζεται στην αναγωγή του προβλήματος στον υπολογισμό ενός απλούστερου φορέα. Αυτό επιτυγχάνεται με την κατάργηση τόσων δεσμικών ράβδων, όσος είναι και ο βαθμός στατικής αοριστίας (βαθμός υπερστατικότητας) ώστε να προκύψει ένα κύριο σύστημα (ισοστατικό ή υπερστατικό) το οποίο μπορεί να επιλυθεί εύκολα. Στη μέθοδο των μετακινήσεων ακολουθούμε αντίστροφη πορεία. Με την προσθήκη δεσμικών ράβδων, καταλήγουμε σε έναν άλλο φορέα που επίσης υπολογίζεται (επιλύεται) εύκολα. **Το κινηματικό (γεωμετρικό) κύριο σύστημα (ΓΚΣ)** προκύπτει από τον αρχικό φορέα με την «πάκτωση» όλων των εκτός εδάφους κόμβων του και την παγίωσή τους κατά x και κατά y . Με την παραπάνω διαδικασία προκύπτουν δομικά στοιχεία τα οποία είναι είτε αμφίπακτες είτε μονόπακτες δοκοί, η επίλυση των οποίων είναι εύκολη (ή είναι γνωστή μέσω πινάκων).

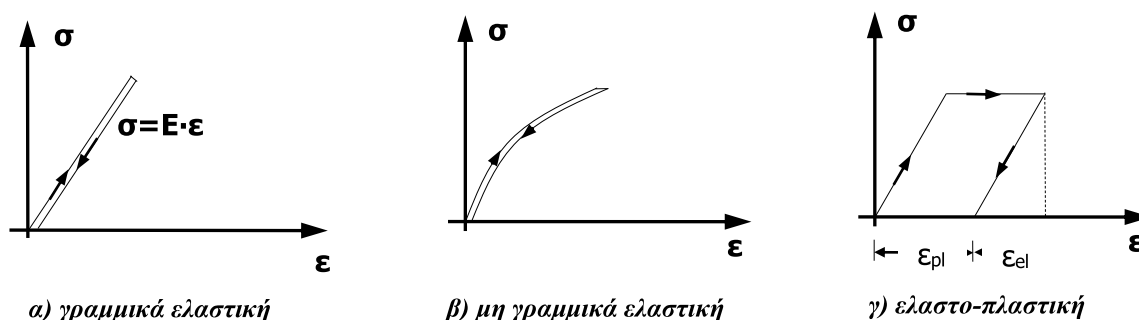
Το γεγονός ότι στη μέθοδο των μετακινήσεων οι εντάσεις συνδέονται άμεσα με τις παραμορφώσεις που υφίσταται ο φορέας από ένα σύνολο δράσεων, εξωτερικών ή καταναγκαστικών, που επενεργούν επί αυτού, βοηθάει στην ανάπτυξη του λεγόμενου στατικού αισθητηρίου σε κάθε δομοστατικό μηχανικό.

Υπενθυμίζεται ότι στο πλαίσιο εφαρμογής της μεθόδου των μετακινήσεων, όπως άλλωστε και της μεθόδου των δυνάμεων ισχύει η ελαστική θεωρία 1^{ης} τάξης με τις εξής τρεις παραδοχές:

- Οι συνθήκες ισορροπίας διατυπώνονται στον απαραμόρφωτο φορέα.
- Οι συνθήκες συμβιβαστού ισχύουν με την παραδοχή ότι οι μετακινήσεις του φορέα, συνακόλουθα και οι παραμορφώσεις είναι πάρα πολύ μικρές και περιγράφονται με τον όρο "απειροστές".
- Ισχύει ο νόμος του Hooke. Η υλική συμπεριφορά, δηλαδή οι καταστατικοί νόμοι που συνδέουν τις παραμορφώσεις με τα φορτία διατομής, είναι γραμμικά ελαστική.

Με βάση αυτές τις παραδοχές ισχύει και η αρχή της επαλληλίας.

1.2 Συμπεριφορά υλικών-Διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων



Σχ. 1.3: Διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων

| Παραμορφώσεις | Θεωρία ραβδωτών φορέων |
|--------------------------|------------------------|
| απεριόριστα μεγάλες | 3 ^{ης} τάξης |
| πεπερασμένες, μικρές | 2 ^{ης} τάξης |
| απειροστές (πολύ μικρές) | 1 ^{ης} τάξης |

1.3 Ελαστική θεωρία 1^{ης} τάξης - Παραδοχές:

Γεωμετρία:

1. Ο φορέας αποτελείται από μεμονωμένες ράβδους-δοκούς, το μήκος των οποίων σε σχέση με το πλάτος και το ύψος είναι μεγάλο.

2. Οι διατομές παραμένουν επίπεδες, διατηρούν το αρχικό σχήμα και είναι κάθετες στον κεντροβαρικό τους άξονα.
3. Οι μετακινήσεις είναι πολύ μικρές (απειροστές) ώστε οι συνθήκες ισορροπίας να εκφράζονται στον απαραμόρφωτο φορέα.

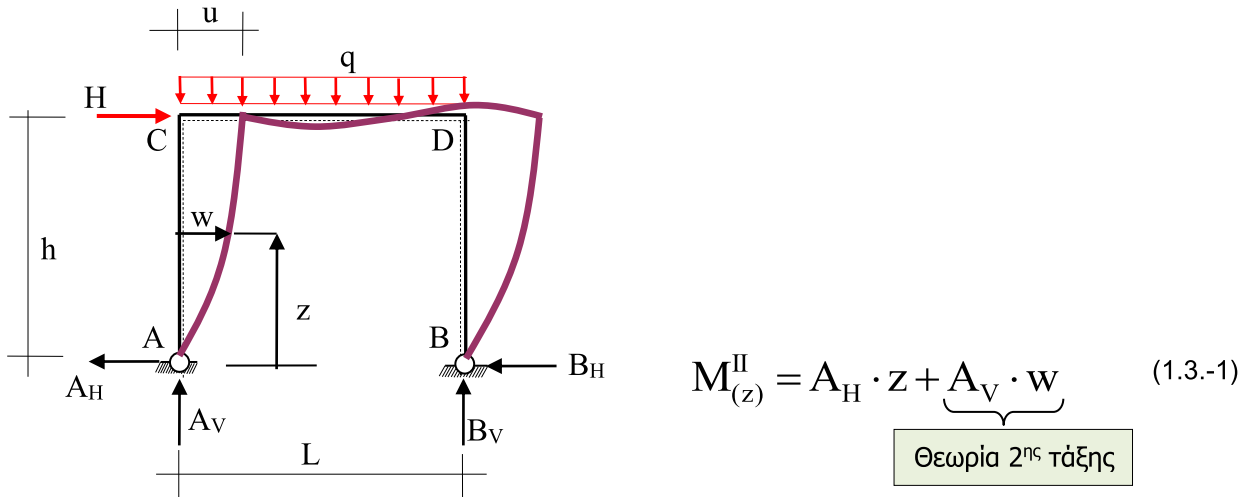
Υλικά:

1. Οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων. Ισχύει ο νόμος του Hooke χωρίς περιορισμούς.

2. Το υλικό είναι ισότροπο, ομογενές και απολύτως ελαστικό.

Φορτία:

Όλα τα φορτία ασκούνται κατά στατικό τρόπο, δηλαδή σε κατάσταση ηρεμίας. Δυναμικά φορτία, με τη βοήθεια κατάλληλων συντελεστών, μετατρέπονται σε στατικά.

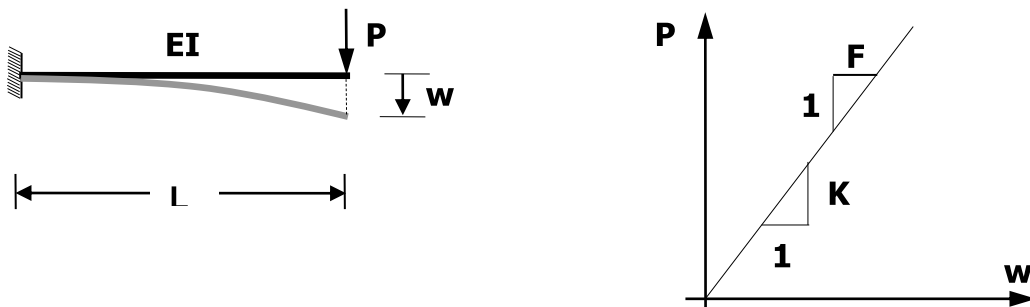


Σχ. 1.4: Θεωρία 2ης τάξης

Η θεωρία δεύτερης τάξης λαμβάνεται κυρίως υπ' όψιν, όταν στον φορέα δρα μια πολύ μικρή οριζόντια δύναμη σε σχέση με το κατακόρυφο φορτίο. (το φαινόμενο επεξηγείται στο σχήμα 1.4). Στην περίπτωση που οι δυνάμεις H και P είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, η συνεισφορά της θεωρίας δεύτερης τάξης δεν είναι σημαντική. Στην περίπτωση του πλαισίου του σχήματος 1.4, η ροπή σε απόσταση z από την στήριξη A κατά την θεωρία 1ης τάξης είναι $M_Z^I = A_H \cdot z$, (στον απαραμόρφωτο άξονα του φορέα), ενώ κατά την θεωρία 2ης τάξης $M_Z^I = A_H \cdot z + A_V \cdot w$ (στην παραμορφωμένη θέση του φορέα).

1.4 Ορισμοί:

Ευκαμψία (ενδοσιμότητα) F: μετακίνηση / μοναδιαία δύναμη
 Ορίζεται ως η μετακίνηση που προκαλείται από μοναδιαία δύναμη. Εκφράζεται σε m/kN
Δυσκαμψία (στιβαρότητα) K: Δύναμη / μοναδιαία μετακίνηση
 Ορίζεται ως η δύναμη F που προκαλεί μοναδιαία μετακίνηση. Εκφράζεται σε kN/m



Σχ. 1.5: Ευκαμψία και Δυσκαμψία. Σχέσεις έντασης - μετακίνησης

Στον πρόβολο του σχήματος 1.5 με μήκος L, μέτρο ελαστικότητας E και ροπή αδράνειας I, η βύθιση του άκρου δίνεται από τη σχέση:

$$w = \frac{1}{3} \cdot \frac{L^3}{EI} \cdot P \quad (1.4-1)$$

Εάν εξισώσουμε τη βύθιση με την μονάδα, π.χ. με ένα m και λύσουμε τη σχέση ως προς τη δύναμη P, η δύναμη P εξ ορισμού ορίζεται ως δυσκαμψία ή στιβαρότητα k.

$$w = \frac{1}{3} \cdot \frac{L^3}{EI} \cdot P = 1 \Rightarrow P = \frac{3 \cdot EI}{L^3} = k \quad (1.4-2)$$

Αντίθετα, εάν στη σχέση (1.4-2) θέσουμε όπου P μονάδα, π.χ. 1 kN, η βύθιση w εξ ορισμού ορίζεται ως η ευκαμψία η ενδοσημότητα F.

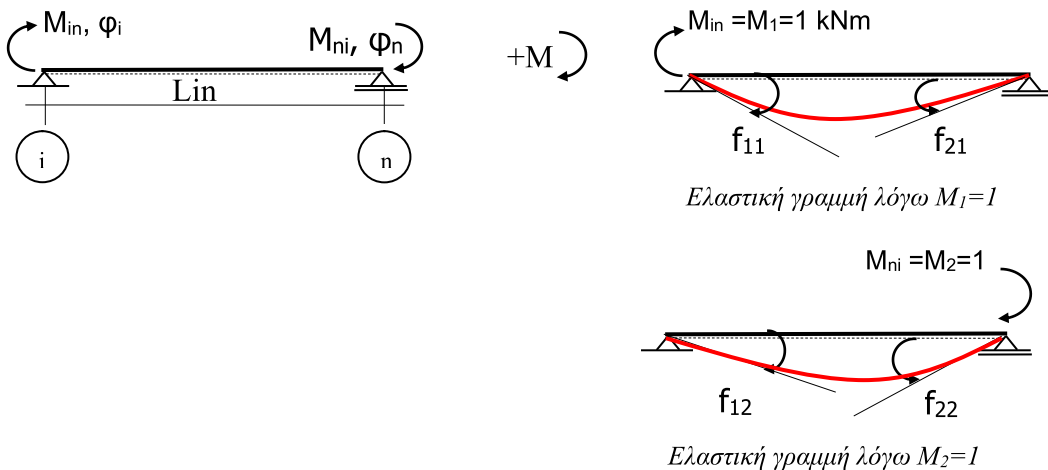
$$w = \frac{1}{3} \cdot \frac{L^3}{EI} \cdot P, \text{ για } P = 1 \Rightarrow w = F = \frac{L^3}{3 \cdot EI} \quad (1.4-3)$$

Ισχύει $K=F^{-1}$

| | |
|--|--|
| Δυστένεια | $E \cdot A$ (E = μέτρο ελαστικότητας, A=εμβαδόν διατομής) παλαιότερος συμβολισμός F |
| Δυσκαμψία (καμπτική στιβαρότητα) | $E \cdot I$ (I=ροπή αδράνειας) |
| Δυστημψία (διατμητική στιβαρότητα) | $G \cdot a_Q \cdot A$ (G=μέτρο διάτμησης, a_Q =συντελεστής μείωσης της διάτμησης) |
| Δυστρεψία (στρεπτική στιβαρότητα), St. Venant | $G \cdot I_T$ I_T =στρεπτική ροπή αδράνειας |

1.5 Εισαγωγή στη μέθοδο των Μετακινήσεων - Μητρωϊκή διατύπωση του προβλήματος

1.5.1 Διατύπωση σχέσεων μεταξύ γωνιών στροφής ϕ_i και ϕ_n και επιρράβδων ροπών M_{in} και M_{ni} στα άκρα ενός δομικού στοιχείου (in).



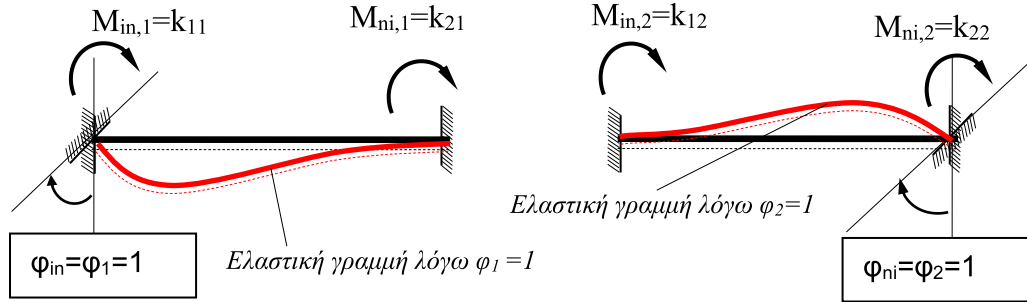
Σχ. 1.6: Το δομικό στοιχείο (in) και μοναδιαίες εντάσεις M_1, M_2

$$\begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{in} \\ M_{ni} \end{bmatrix} \quad (1.5-1)$$

Μητρώο ευκαμψίας

f_{11} και f_{21} είναι οι γωνίες στροφής των διατομών στις θέσεις (i) και (n) αντίστοιχα, λόγω της μοναδιαίας ροπής $M_{in}=1$ που ασκείται στη θέση (i)

f_{12} και f_{22} είναι οι γωνίες στροφής των διατομών στις θέσεις (i) και (n) αντίστοιχα, λόγω της μοναδιαίας ροπής $M_{ni}=1$ που ασκείται στη θέση (n)



Σχ. 1.7: Μοναδιαίες καταστάσεις μετακινήσεων ϕ_1, ϕ_2

$$\begin{bmatrix} M_{in} \\ M_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_n \end{bmatrix} \quad (1.5-2)$$

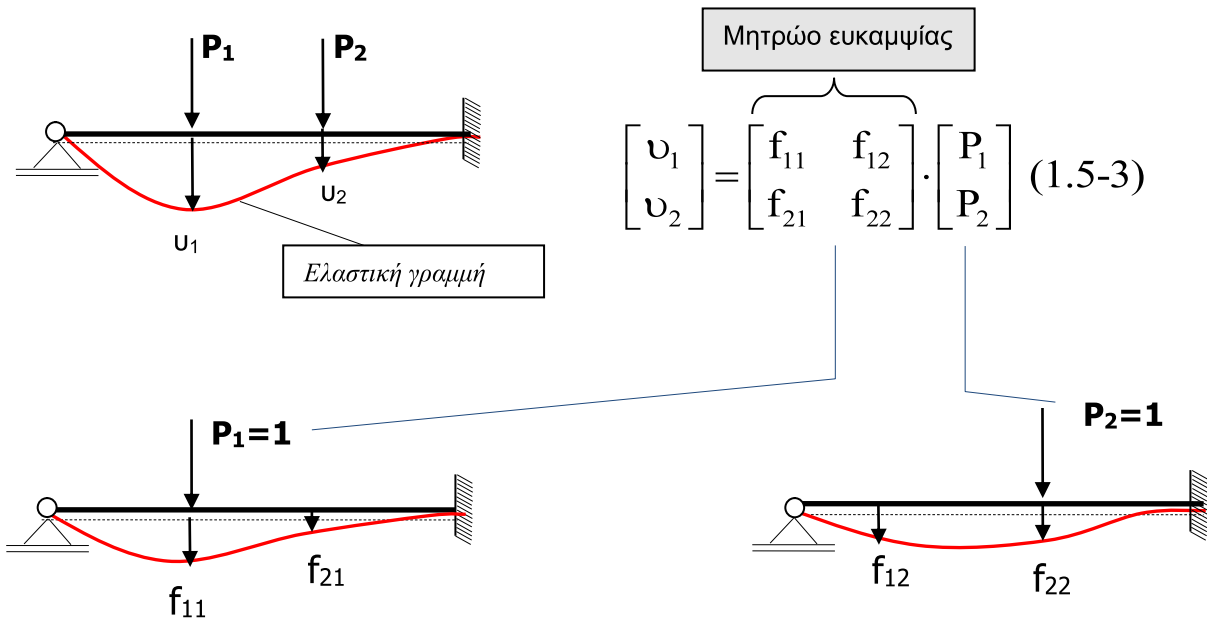
Μητρώο δυσκαμψίας

k_{11} και k_{21} είναι οι ροπές που αναπτύσσονται στα άκρα του δομικού στοιχείου, λόγω μοναδιαίας στροφής της διατομής στη θέση (i).

k_{12} και k_{22} είναι οι ροπές που αναπτύσσονται στα άκρα του δομικού στοιχείου, λόγω μοναδιαίας στροφής της διατομής στη θέση (n).

1.5.2 Διατύπωση της σχέσης που συνδέει την ένταση P (P_1, P_2) με τις μετακινήσεις u_1, u_2 των σημείων εφαρμογής των δυνάμεων, σε μια μονόπακτη δοκό:

Εφαρμόζεται η τρίτη πρόταση αμοιβαιότητας (κατά MAXWELL- MOHR) σε συνδυασμό με την αρχή της επαλληλίας.

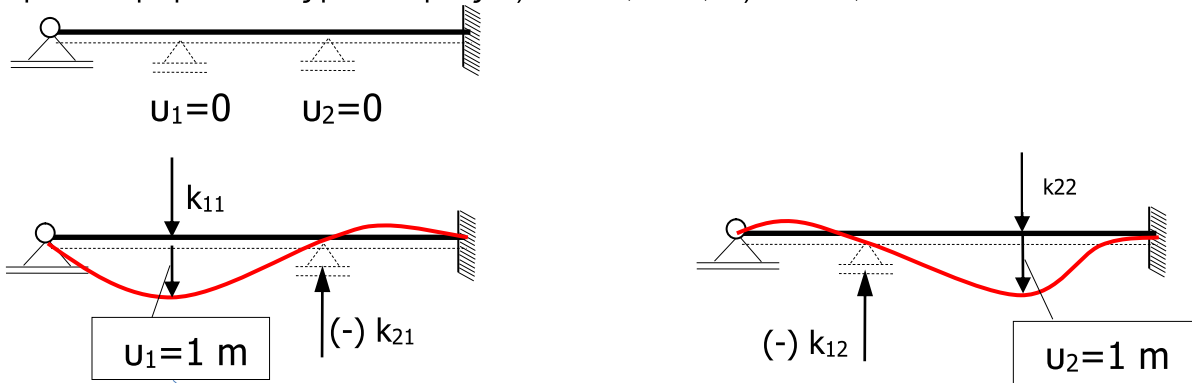


Σχ. 1.8: Μοναδιαίες εντάσεις P_1, P_2

Το μητρώο ευκαμψίας παριστάνει τις μετακινήσεις u_1, u_2 λόγω των μοναδιαίων δυνάμεων $P_1=P_2=1$ kN που εφαρμόζονται διαδοχικά στις θέσεις 1 και 2. f_{11} παριστάνει την μετακίνηση στη θέση 1 λόγω $P_1=1$ kN, f_{22} παριστάνει την μετακίνηση στη θέση 2 λόγω $P_2=1$ kN, f_{21} παριστάνει την μετακίνηση στη θέση 2 λόγω $P_1=1$, f_{12} παριστάνει την μετακίνηση στη θέση 1 λόγω $P_2=1$ kN.

Αντιστροφή του προβλήματος:

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις P_1, P_2 που προκαλούν μοναδιαίες μετακινήσεις $u_1= u_2=1$ m. Απελευθερώνουμε διαδοχικά τις δύο δεσμεύσεις-κυλίσεις στα σημεία εφαρμογής των P_1, P_2 και προκαλούμε μοναδιαίες μετακινήσεις: 1) $u_1=1$ m, $u_2=0$, 2) $u_2=1$ m, $u_1=0$



Σχ. 1.8: Μοναδιαίες εντάσεις

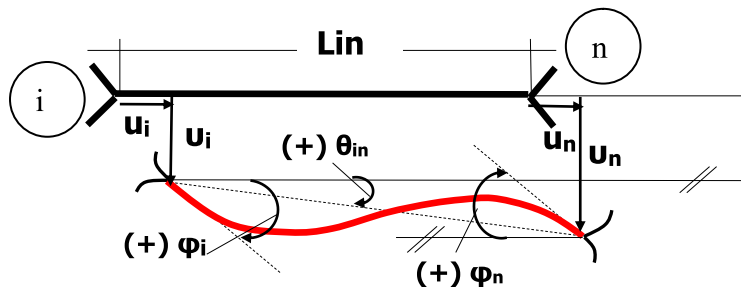
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.5 - 4)$$

Μητρώο δυσκαμψίας

Σχ. 1.9: Μοναδιαίες μετακινήσεις u_1, u_2

Το μητρώο δυσκαμψίας παριστάνει τις δυνάμεις P_1, P_2 που προκαλούν μοναδιαίες μετακινήσεις $u_1= u_2=1$ m. k_{11} παριστάνει τη δύναμη που προκαλεί μοναδιαία μετακίνηση στη θέση 1, k_{22} παριστάνει τη δύναμη που προκαλεί μοναδιαία μετακίνηση στη θέση 2, k_{21} και k_{12} είναι οι αντίστοιχες δυνάμεις στήριξης.

1.6 Μητρική διατύπωση της σχέσης έντασης-παραμόρφωσης στα άκρα (i), (n) ενός δομικού στοιχείου (σ):



Σχ.1.10: Το δομικό στοιχείο (σ)

Συμβολίζουμε με \underline{S}^σ το μητρικό διάνυσμα έντασης, με \underline{V}^σ το διάνυσμα των επικόμβιων μετακινήσεων και με $\underline{S}^{\sigma 0}$ το διάνυσμα των επικόμβιων φορτίων του αντίστοιχου κύριου κινηματικού συστήματος, στα άκρα (i) και (n) ενός στοιχείου (σ).

$$\underline{s}^\sigma = \begin{Bmatrix} \underline{S}_i^\sigma \\ \underline{S}_n^\sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \\ N_n \\ Q_n \\ M_n \end{Bmatrix}^\sigma, \quad \underline{v}^\sigma = \begin{Bmatrix} \underline{V}_i^\sigma \\ \underline{V}_n^\sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_n \\ v_n \\ \varphi_n \end{Bmatrix}^\sigma, \quad \underline{s}^{\sigma 0} = \begin{Bmatrix} \underline{S}_i^{\sigma 0} \\ \underline{S}_n^{\sigma 0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i^0 \\ Q_i^0 \\ M_i^0 \\ N_n^0 \\ Q_n^0 \\ M_n^0 \end{Bmatrix}^\sigma \quad (1.6-1)$$

και σε γενική μορφή:

$$\underline{s}^\sigma = \underline{K}^\sigma \cdot \underline{v}^\sigma + \underline{s}^{\sigma 0} \quad (1.6-2)$$

όπου \underline{K}^σ είναι το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου (σ)

Το μητρώο δυσκαμψίας \underline{K}^σ προκύπτει από τις επικόμβιες εντάσεις όταν διαδοχικά, ένα στοιχείο του διανύσματος των επικόμβιων μετακινήσεων πάρει την τιμή "1" και όλα τα υπόλοιπα την τιμή "0".

$$\underline{K}^\sigma = \begin{bmatrix} N_{i(\varphi_i=1)} & N_{i(v_i=1)} & N_{i(u_i=1)} & N_{i(\varphi_n=1)} & N_{i(v_n=1)} & N_{i(u_n=1)} \\ Q_{i(\varphi_i=1)} & Q_{i(v_i=1)} & Q_{i(u_i=1)} & Q_{i(\varphi_n=1)} & Q_{i(v_n=1)} & Q_{i(u_n=1)} \\ M_{i(\varphi_i=1)} & M_{i(v_i=1)} & M_{i(u_i=1)} & M_{i(\varphi_n=1)} & M_{i(v_n=1)} & M_{i(u_n=1)} \\ N_{n(\varphi_i=1)} & N_{n(v_i=1)} & N_{n(u_i=1)} & N_{n(\varphi_n=1)} & N_{n(v_n=1)} & N_{n(u_n=1)} \\ Q_{n(\varphi_i=1)} & Q_{n(v_i=1)} & Q_{n(u_i=1)} & Q_{n(\varphi_n=1)} & Q_{n(v_n=1)} & Q_{n(u_n=1)} \\ M_{n(\varphi_i=1)} & M_{n(v_i=1)} & M_{n(u_i=1)} & M_{n(\varphi_n=1)} & M_{n(v_n=1)} & M_{n(u_n=1)} \end{bmatrix} \quad (1.6-3)$$

$$\underline{K}^\sigma = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^\sigma & \underline{K}_{in}^\sigma \\ \underline{K}_{ni}^\sigma & \underline{K}_{nn}^\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot EI}{L^3} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EI}{L^3} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.6-4)$$

Γενικεύοντας το πρόβλημα, η μητρική εξίσωση ισορροπίας για ολόκληρο τον φορέα διατυπώνεται ως εξής:

$$\underline{K} \cdot \underline{V} = \underline{p} \quad \text{ή} \quad \underline{V} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{p} \quad (1.6-5)$$

όπου \underline{K} το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας, \underline{V} το μητρώο των επικόμβιων μετακινήσεων και

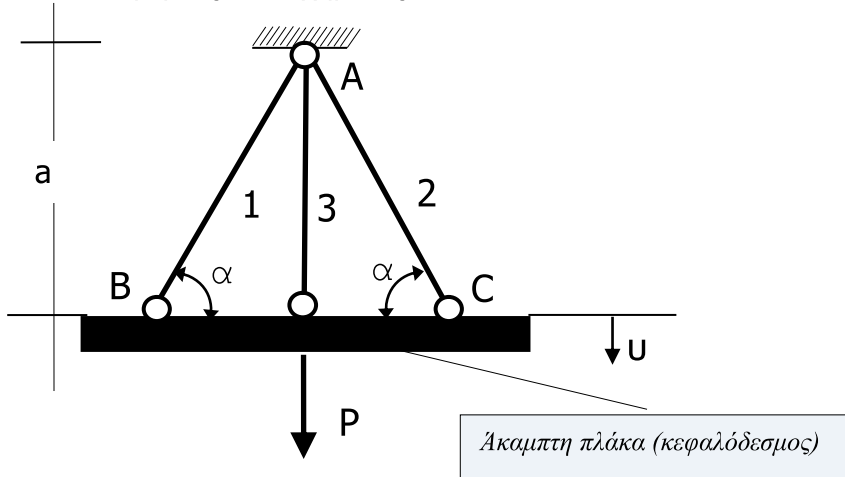
P το τελικό διάνυσμα φόρτισης.

1.7 Εισαγωγικά παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1:

Απλή εφαρμογή εισαγωγικά στη Μέθοδο των Μετακινήσεων

Δίνεται ο φορέας του σχήματος 1.11:



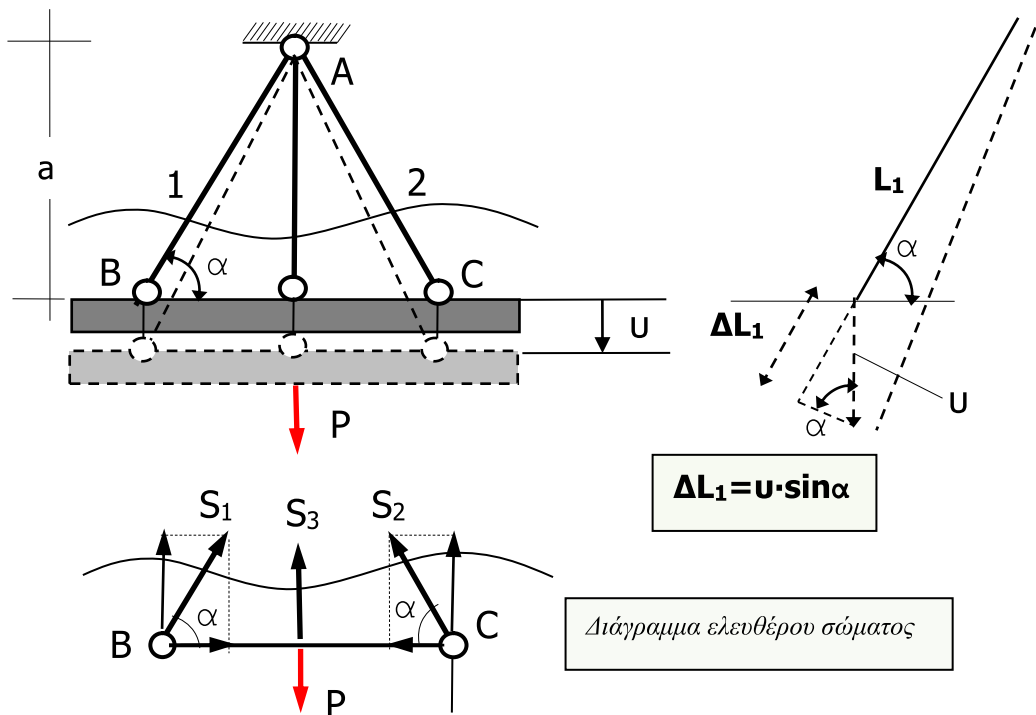
Σχ. 1.11: Παράδειγμα 1.1

Από τις ράβδους (1), (2) και (3) μέσω άκαμπτης πλάκας (κεφαλόδεσμου) αναρτάται μια δύναμη P . Να υπολογιστούν οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων και η βύθιση (u) του σημείου σύνδεσης με την πλάκα.

Δεδομένα: $E_e=21 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ (χάλυβας)

$A_1=A_2=40 \text{ cm}^2, A_3=20 \text{ cm}^2$

$P=100 \text{ kN}, a=3.0 \text{ m}, \alpha=30^\circ$



Σχ. 1.12: Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

Συμβολίζουμε με ΔL την αξονική παραμόρφωση των ράβδων και u τη βύθιση των κόμβων B και C.

Στο Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (ΔΕΣ) οι συνθήκες του προβλήματος διατυπώνονται ως εξής:

1) Στατικές (ΣΥ=0):

$$S_1 \cdot \sin \alpha + S_2 \cdot \sin \alpha + S_3 = P$$

2) Κινηματικές:

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 = u \cdot \sin \alpha, \Delta L_3 = u$$

3) Καταστατικές (νόμος του Hooke):

$$S_1 = \frac{E_e \cdot A_1}{L_1} \cdot \Delta L_1, S_2 = \frac{E_e \cdot A_2}{L_2} \cdot \Delta L_2, S_3 = \frac{E_e \cdot A_3}{L_3} \cdot \Delta L_3$$

Με την αντικατάσταση των σχέσεων (1.7-2) και (1.7 -3) στην (1.7 -1) προκύπτει:

$$\frac{E_e \cdot A_1}{L_1} \cdot u \cdot (\sin \alpha)^2 + \frac{E_e \cdot A_2}{L_2} \cdot u \cdot (\sin \alpha)^2 + \frac{E_e \cdot A_3}{L_3} \cdot u = P$$

$$\frac{E_e \cdot A_1}{a} \cdot u \cdot (\sin \alpha)^3 + \frac{E_e \cdot A_2}{a} \cdot u \cdot (\sin \alpha)^3 + \frac{E_e \cdot A_3}{a} \cdot u = P$$

$$u = \frac{P \cdot a}{E_e \cdot [(A_1 \cdot (\sin \alpha)^3 + A_2 \cdot (\sin \alpha)^3 + A_3)]}$$

$$S_1 = \frac{P \cdot A_1 \cdot (\sin \alpha)^2}{[A_1 \cdot (\sin \alpha)^3 + A_2 \cdot (\sin \alpha)^3 + A_3]}$$

$$S_2 = \frac{P \cdot A_2 \cdot (\sin \alpha)^2}{[A_1 \cdot (\sin \alpha)^3 + A_2 \cdot (\sin \alpha)^3 + A_3]}$$

$$S_3 = \frac{P \cdot A_3}{[A_1 \cdot (\sin \alpha)^3 + A_2 \cdot (\sin \alpha)^3 + A_3]}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

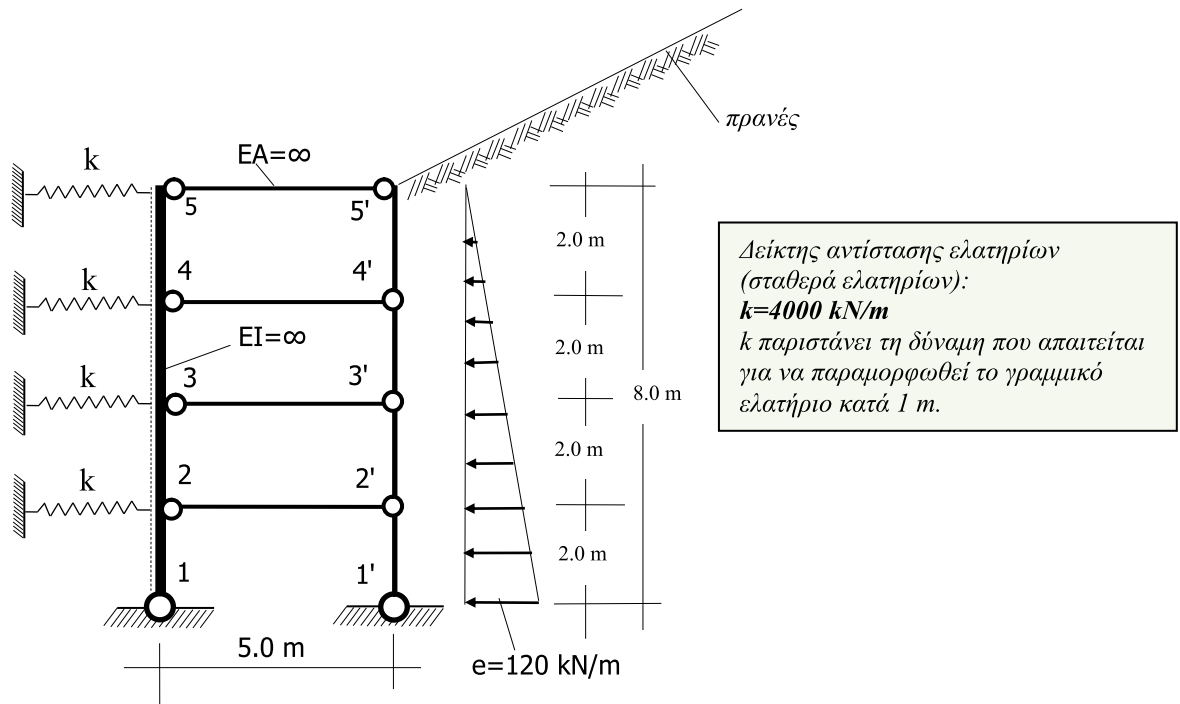
$$u = \frac{100 \cdot 3}{21 \cdot 10^7 \cdot [2 \cdot 40 \cdot 10^{-4} \cdot (\sin 30)^3 + 20 \cdot 10^{-4}]} = \frac{300}{21 \cdot 10^3 \cdot 30} = 4.762 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4.762 \text{ mm}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{100 \cdot 40 \cdot 10^{-4} \cdot (\sin 30)^2}{[2 \cdot 40 \cdot 10^{-4} \cdot (\sin \alpha)^3 + 20 \cdot 10^{-4}]} = \frac{1000}{30} = 33.33 \text{ kN}$$

$$S_3 = \frac{100 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{[2 \cdot 40 \cdot 10^{-4} \cdot (\sin \alpha)^3 + 20 \cdot 10^{-4}]} = \frac{2000}{30} = 66.67 \text{ kN}$$

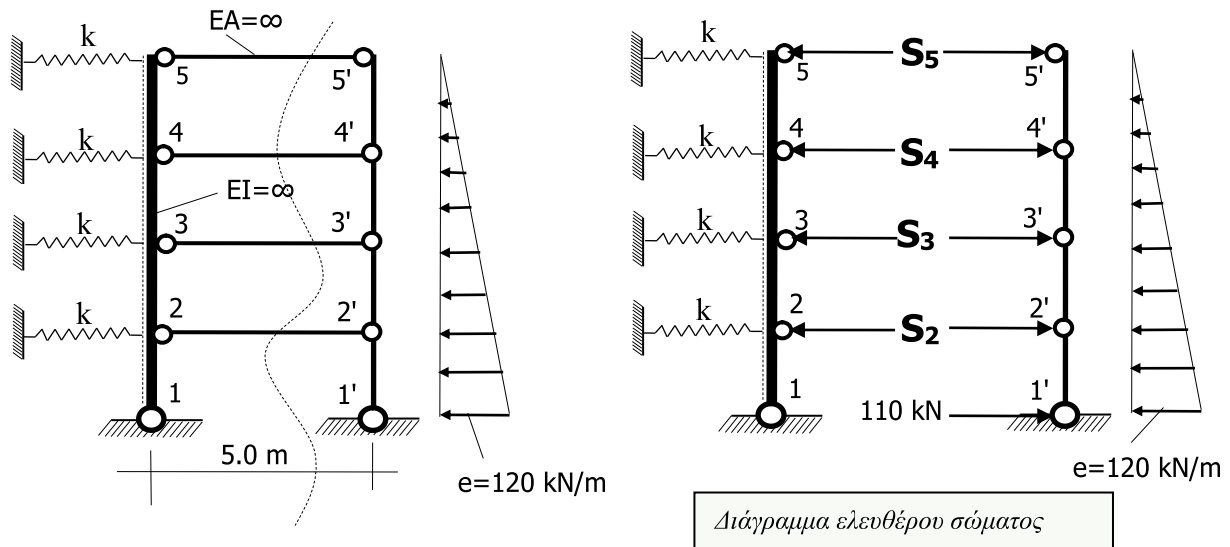
Παράδειγμα 1.2:

Στον φορέα του σχήματος 1.13, ο κατακόρυφος τοίχος αντιστήριξης (1-5) είναι άκαμπτος ($EI = \infty$) και συνδέεται αρθρωτά με το έδαφος και με τον τοίχο (1'-5') μέσω (4) οριζοντίων ράβδων-αντηρίδων με άπειρη δυστένεια ($EA = \infty$). Στον τοίχο (1'-5') ασκείται ενεργητική ώθηση γαιών τριγωνικής κατανομής με μέγιστη τεταγμένη στη βάση, 120 kN/m. (Το μέγεθος είναι θεωρητικό). **Ζητούνται οι τάσεις των ελατηρίων και τα διαγράμματα M-Q στον τοίχο (1-5).**



Σχ. 1.13: Παράδειγμα 1.2

Οι δυνάμεις που προκύπτουν λόγω της ώθησης γαιών, μέσω των οριζοντίων ράβδων μεταβιβάζονται στην άκαμπτη δοκό (1-5).



Σχ. 1.14: Παράδειγμα 1.2 – ΔΕΣ

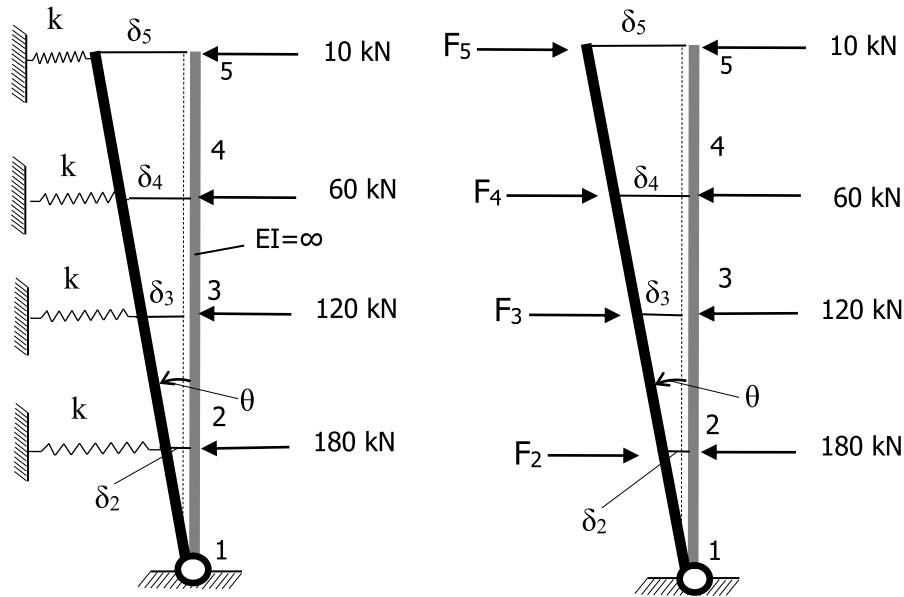
Υπολογισμός των τάσεων των ράβδων (ανάλυση τριγωνικού φορτίου):

$$S_5 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} \cdot e \cdot 2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} \cdot 120 \cdot 2 = 10 \text{ kN}$$

$$S_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot e \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} \cdot e \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} \cdot e \cdot 2 = \frac{24}{48} \cdot e = 60 \text{ kN}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} \cdot e \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot e \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} \cdot e \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} \cdot e \cdot 2 = \frac{48}{48} \cdot e = 120 \text{ kN}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} \cdot e \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot e \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} \cdot e \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} \cdot e \cdot 2 = \frac{72}{48} \cdot e = 180 \text{ kN}$$



Σχ. 1.15: Παράδειγμα 1.2 – κατάσταση μετακινήσεων δ

Καταστατικές συνθήκες:

Τάσεις ελατηρίων

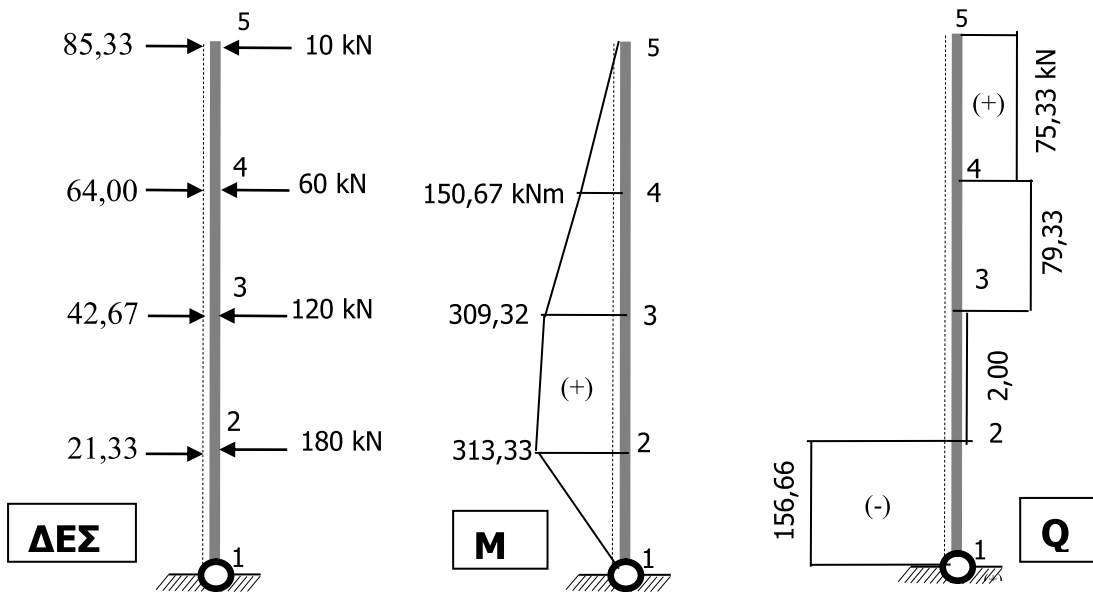
$$\left. \begin{aligned} F_5 &= k \cdot \delta_5 = k \cdot 8 \cdot \theta = 8 \cdot k \cdot \theta \\ F_4 &= k \cdot \delta_4 = k \cdot 6 \cdot \theta = 6 \cdot k \cdot \theta \\ F_3 &= k \cdot \delta_3 = k \cdot 4 \cdot \theta = 4 \cdot k \cdot \theta \\ F_2 &= k \cdot \delta_2 = k \cdot 2 \cdot \theta = 2 \cdot k \cdot \theta \end{aligned} \right\}$$

Στατικές συνθήκες:

$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow (8 \cdot k \cdot \theta \cdot 8 + 6 \cdot k \cdot \theta \cdot 6 + 4 \cdot k \cdot \theta \cdot 4 + 2 \cdot k \cdot \theta \cdot 2) - (10 \cdot 8 + 60 \cdot 6 + 120 \cdot 4 + 180 \cdot 2) = 0$$

$$120 \cdot k \cdot \theta = 1280 \Rightarrow \theta = \frac{1280}{120 \cdot k} = \frac{1280}{120 \cdot 4000} = 2,667 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} F_5 &= 8 \cdot 4000 \cdot 2,667 \cdot 10^{-3} = 85,33 \text{ kN} \\ F_4 &= 6 \cdot 4000 \cdot 2,667 \cdot 10^{-3} = 64,00 \text{ kN} \\ F_3 &= 4 \cdot 4000 \cdot 2,667 \cdot 10^{-3} = 42,67 \text{ kN} \\ F_2 &= 2 \cdot 4000 \cdot 2,667 \cdot 10^{-3} = 21,33 \text{ kN} \\ \delta_5 &= 8 \cdot 2,667 \cdot 10^{-3} = 0,021 \text{ m} = 2,10 \text{ cm} \end{aligned}$$



Σχ. 1.16: Παράδειγμα 1.2 – Διαγράμματα M-Q και δυνάμεις (τάσεις) ελατηρίων

Παράδειγμα 1.3 - Υδατόπυργος

Στα σχήματα 1.17, 1.18 απεικονίζεται ένας υδατόπυργος (υδατοδεξαμενή) από οπλισμένο σκυρόδεμα με μέτρο ελαστικότητας $E=2,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$. Ο φορέας στηρίζεται σε (4) υποστυλώματα τετραγωνικής διατομής 60/60 cm και εδράζεται στο έδαφος μέσω θεμελίωσης που αποτελείται από (4) μεμονωμένα πέδιλα που συνδέονται μεταξύ των με συνδετήριες δοκούς. Η υδατοδεξαμενή είναι ανοιχτή στο άνω μέρος της, φέρει περιμετρικά τοιχεία (υψίκορμες δοκοί) πλάτους 25 cm και ύψους 4.0 m και δάπεδο πάχους 30 cm (Σχήματα 1.18, 1.19)

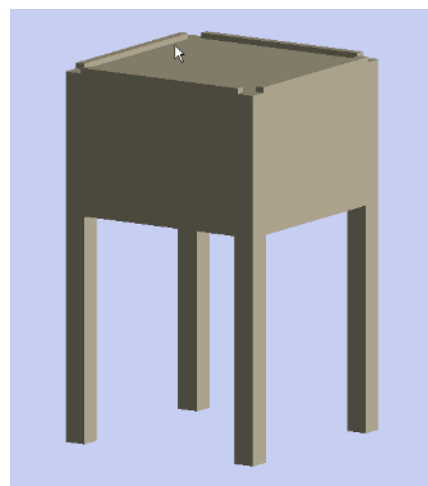
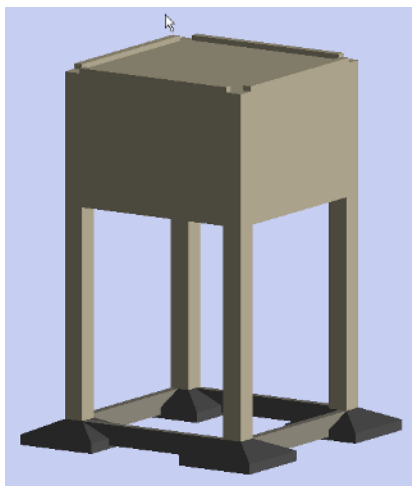
Το σχήμα 1.17 παριστάνει τη χωρική προσομοίωση (στατικός φορέας στο χώρο) της πραγματικής κατασκευής. Τα τοιχώματα θεωρείται ότι έχουν άπειρη δυσκαμψία (I_∞), επειδή η δυσκαμψία των (ροπή αδράνειας ορθογωνικής διατομής) είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τη δυσκαμψία των υποστυλωμάτων ($I_2=0,25 \cdot 4^3/12=1,3333 \text{ m}^4 \gg I_1= 0,6^4/12=0,0108 \text{ m}^4$). Το ειδικό βάρος του σκυροδέματος είναι 25 kN/m^3 .

Το συνολικό βάρος της υδατοδεξαμενής – όταν είναι γεμάτη με νερό - είναι:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. Ίδιο βάρος υποστυλωμάτων: | $0,6^2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 25=288 \text{ kN}$ |
| 2. Ίδιο βάρος περιμετρικών τοιχείων: | $2 \cdot 0,25 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 25+2 \cdot 0,25 \cdot 5,50 \cdot 4 \cdot 25=575 \text{ kN}$ |
| 3. Ίδιο βάρος πλάκας δαπέδου: | $0,30 \cdot 5,5 \cdot 5,5 \cdot 25=226,9 \text{ kN}$ |
| 4. Βάρος νερού (πλήρης δεξαμενή): | $5,5^2 \cdot 3,70 \cdot 10=1119,25 \text{ kN}$ |
| (113,4 m ³ νερό) | |

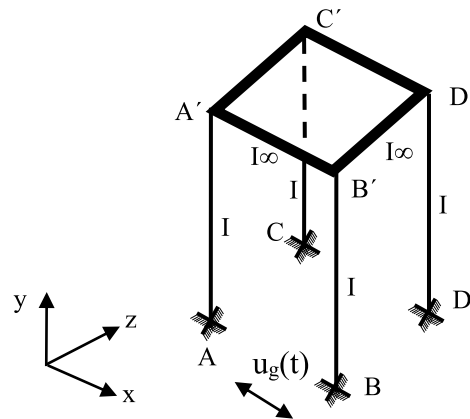
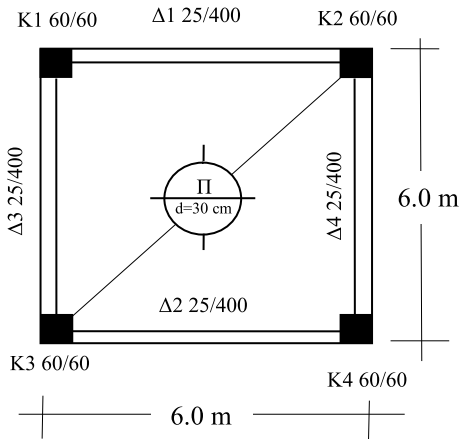
Συνολικό βάρος: 2209,25 kN

Ζητούνται τα διαγράμματα M, Q, N των στύλων και η μετακίνηση της κεφαλής των, για σεισμική δράση στη διεύθυνση $\pm x$ που αντιστοιχεί σε ζώνη σεισμικής επικινδυνότητας II.



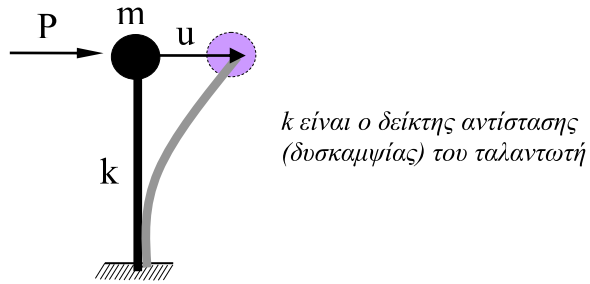
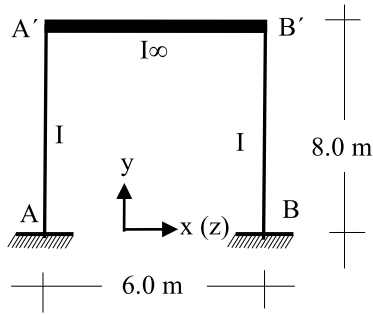
Σχ. 1.17: Υδατόπυργος (ανοδομή και θεμελίωση)

ΣΧ. 1.18: Υδατόπυργος (ανοδομή)



Σχ. 1.19: Ξυλότυπος δαπέδου δεξαμενής

Σχ. 1.20: Στατικό σύστημα- χωρικός φορέας



Σχ. 1.21: Στατικό σύστημα-επίπεδος φορέας Σχ. 1.22: Προσομοίωση υδατόπυργου ως μονοβάθμιου ταλαντωτή

Για λόγους πληρότητας παρατίθεται μια μικρή εισαγωγή στις σεισμικές δράσεις προκειμένου να υπολογιστεί η ισοδύναμη σεισμική δύναμη P που ασκείται στην κορυφή του χωρικού πλαισίου, αντιμετωπίζοντας τον υδατόπυργο ως μονοβάθμιο ταλαντωτή.

Εισαγωγικά για τις Σεισμικές Δράσεις Σχεδιασμού (Τυχηματικές δράσεις)

Ο σεισμός, ως φυσικό φαινόμενο που συμβαίνει σε ένα εστιακό βάθος και συνοδεύεται με απελευθέρωση ενέργειας, οφείλεται σε θραύση (μετά από πολύ μεγάλη συγκέντρωση τάσεων) και ανακατάταξη εδαφικών στρωμάτων. Τα σεισμικά κύματα διαδίδονται μέσω του εδάφους, το οποίο με τη σειρά του διεγείρει το δόμημα - κτήριο που είναι θεμελιωμένο σ' αυτό. Η μετακίνηση που υφίσταται το κτήριο είναι δυναμικής μορφής, δηλαδή μεταβαλλόμενη με το χρόνο και με εναλλασσόμενο πρόσημο. Οι σεισμικές δυνάμεις που καταπονούν το κτήριο προκύπτουν λόγω της αντίστασης που προβάλλει ο φορέας.

Οι σεισμικές δράσεις σχεδιασμού είναι οι ελάχιστες σεισμικές κινήσεις για τις οποίες απαιτείται να γίνεται ο σχεδιασμός των κτιρίων.

Οι σεισμικές κινήσεις συνίστανται από οριζόντιες συνιστώσες και μια κατακόρυφη. Οι τρεις συνιστώσες θεωρούνται ότι είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Οι σεισμικές κινήσεις σχεδιασμού καθορίζονται από φάσματα επιταχύνσεων σχεδιασμού που δίνουν την μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης $R_d(T)$ που υφίσταται υπολογιστικά ένας απλός ταλαντωτής με **ιδιοπερίοδο T** κατά τη διάρκεια του σεισμού σχεδιασμού.

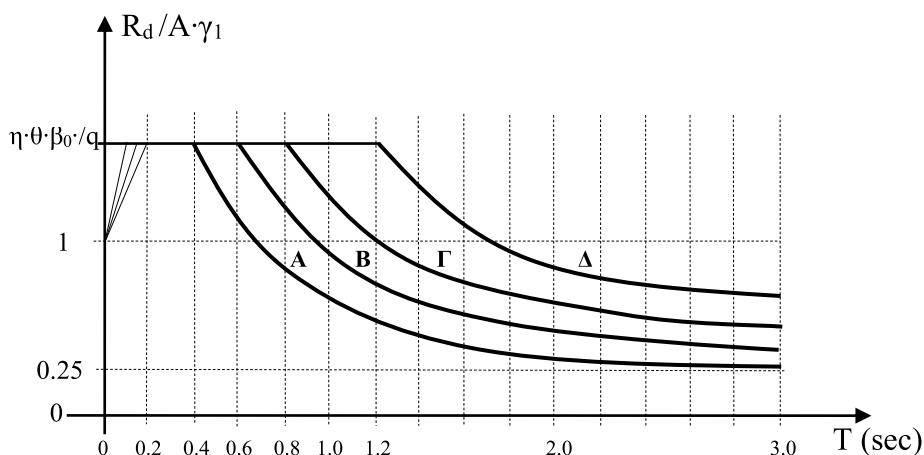
Η οριζόντια σεισμική δράση σχεδιασμού θεωρείται ότι δρα χωριστά σε δύο οριζόντιες, κάθετες μεταξύ των, διευθύνσεις x και z. Επειδή δεν ισχύει εδώ η αρχή της επαλληλίας, οι προκύπτουσες μέγιστες αποκρίσεις (μετακινήσεις) για ταυτόχρονη δράση των τριών συνιστωσών του σεισμού προκύπτουν σύμφωνα με τον κανόνα της απλής τετραγωνικής επαλληλίας. Οι πιθανές ακραίες τιμές $ex A$ τυχόν μεγέθους απόκρισης A δίνονται από τη σχέση:

$$ex A = \pm \sqrt{(ex A_{,x})^2 + (ex A_{,y})^2 + (ex A_{,z})^2} \tag{1.7-1}$$

όπου $ex A_{,x}$, $ex A_{,y}$ και $ex A_{,z}$ είναι οι μέγιστες πιθανές τιμές του υπόψη μεγέθους για ανεξάρτητη σεισμική δράση κατά τις διευθύνσεις x, y και z αντίστοιχα.

Γενικά επιτρέπεται η παράληψη της κατακόρυφης συνιστώσας του σεισμού, εκτός από τις περιπτώσεις φορέων από προεντεταμένο σκυρόδεμα και δοκών που φέρουν φυτευτά υποστυλώματα, δοκών σε πρόβολο τύπου έρκερ, δοκών τύπου Vierendeel.

Κάθε μια από τις οριζόντιες συνιστώσες των σεισμικών κινήσεων σχεδιασμού καθορίζεται από ελαστικό φάσμα επιταχύνσεων σχεδιασμού όπου στον οριζόντιο άξονα αναφέρεται η ιδιοπερίοδος (T) του ταλαντωτή-κτηρίου σε (s) και στον κατακόρυφο άξονα η ανηγμένη επιτάχυνση $R_d/A \cdot \gamma_1 \geq 0.25$ (Σχ. 1.23). Το ελαστικό φάσμα επιταχύνσεων δεν αντιστοιχεί σε καμία πραγματική σεισμική δόνηση, αλλά είναι αποτέλεσμα στατιστικής επεξεργασίας φασμάτων πολλών σεισμικών δονήσεων.



Σχ. 1.23: Φάσμα επιταχύνσεων σχεδιασμού

$A = \alpha \cdot g$ είναι η μέγιστη οριζόντια σεισμική επιτάχυνση του εδάφους, α είναι η εδαφική επιτάχυνση ανηγμένη στην επιτάχυνση της βαρύτητας.

| Ζώνη σεισμικής επικινδυνότητας | I | II | III |
|--------------------------------|------|------|------|
| α | 0,16 | 0,24 | 0,36 |

γ_1 είναι ο συντελεστής σπουδαιότητας του κτιρίου (τιμές 0,85-1,30)

q είναι ο συντελεστής σεισμικής συμπεριφοράς του κτιρίου. Εισάγει τη μείωση των σεισμικών επιταχύνσεων της πραγματικής κατασκευής, λόγω μετελαστικής συμπεριφοράς, σε σχέση με τις επιταχύνσεις που προκύπτουν υπολογιστικά σε απεριόριστα ελαστικό σύστημα. Ο συντελεστής συμπεριφοράς q εκφράζει την ικανότητα της κατασκευής να απορροφά ενέργεια με πλαστική συμπεριφορά, χωρίς να μειώνεται δραστικά η αντοχή της.

($q=1$ ελαστική συμπεριφορά, $q=3,5$ για κτήρια από οπλισμένο σκυρόδεμα με πλαίσιακό ή μικτό σύστημα, $q=4$ για κτήρια από χάλυβα).

η είναι διορθωτικός συντελεστής για ποσοστό απόσβεσης $\zeta \neq 5\%$ ($\eta \geq 0,70$)

(για κτήρια από οπλισμένο σκυρόδεμα το ποσοστό απόσβεσης είναι 5%)

θ είναι ο συντελεστής επιρροής της θεμελίωσης ($\theta=1$ κτήριο χωρίς υπόγειο, $\theta=0,90$ κτήριο με ένα υπόγειο, $\theta=0,80$ κτήριο με δύο τουλάχιστον υπόγεια)

β_0 είναι ο συντελεστής φασματικής ενίσχυσης ($=2,50$)

A, B, Γ, Δ είναι οι κατηγορίες εδαφών (A=βραχώδες, Δ=μαλακό έδαφος)

Για κάθε κύρια διεύθυνση του κτιρίου, το συνολικό μέγεθος των σεισμικών φορτίων (τέμνουσα βάσης) υπολογίζεται από τη σχέση:

$V_0 = M \cdot R_d(T)$ όπου M είναι η συνολική ταλαντούμενη μάζα της κατασκευής ($M=B/g$), $R_d(T)$ είναι η φασματική επιτάχυνση σχεδιασμού και T είναι η θεμελιώδης ιδιοπερίοδος της κατασκευής.

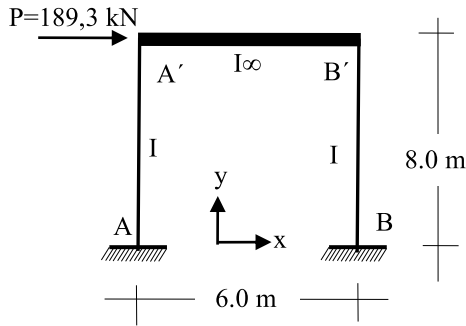
Λόγω απόλυτης συμμετρίας ως προς τους άξονες x και z , ο χωρικός φορέας μπορεί να διασπαστεί σε δύο επίπεδα πλαίσια κατά $x-x$, το πλαίσιο AA'B'B και το πλαίσιο CC'D'D. Η συνολική ταλαντούμενη μάζα κατά το σεισμό είναι $M=B/g=2209,25/10=220,9$ kN/m/sec².

Η ανηγμένη επιτάχυνση $R_d(t)$ είναι:

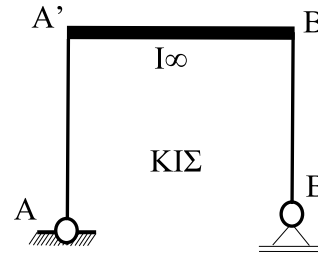
$$R_d(t) = A \cdot \gamma_1 \cdot \frac{\eta \cdot \theta \cdot \beta_0}{q} = 0,24 \cdot 10 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 2,50}{3,5} = 1,714 \quad (q = 3,5 \text{ κατασκευή από σκυρόδεμα})$$

και η συνολική τέμνουσα βάσης $V_0 = M \cdot R_d(T) = 220,9 \cdot 1,714 = 378,62$ kN

Το κάθε ένα από τα δύο πλαίσια στη διεύθυνση x-x παραλαμβάνει το μισό της συνολικής τέμνουσας δηλαδή $378,62/2=189,3$ kN και το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα επίλυσης του επιπέδου πλαισίου με ισοδύναμη σεισμική φόρτιση μια οριζόντια δύναμη $P=189,3$ kN



Σχ. 1.24: Στατικό σύστημα και φόρτιση



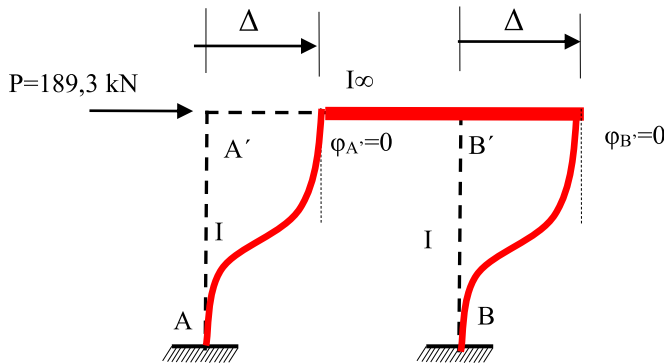
Σχ. 1.25: Κύριο ισοστατικό σύστημα

Το πλαίσιο μπορεί να επιλυθεί είτε με τη μέθοδο των δυνάμεων κατά τα γνωστά, π.χ. επιλέγοντας ως κύριο ισοστατικό σύστημα αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.25 όπου οι ολοκληρώσεις $\delta_{ij} = \int_{(AA'+BB')} M_{r_i} \cdot M_{r_j} \cdot \frac{ds}{EI} = \int_{(AA'+BB')} M_{r_i} \cdot M_{r_j} \cdot \frac{ds}{EI}$ θα περιοριστούν στα τμήματα AA' και BB'

λόγω άπειρης δυσκαμψίας του ζυγώματος A'B' ($\int_{(A'B')} M_{r_i} \cdot M_{r_j} \cdot \frac{ds}{EI_\infty} = 0$)

είτε με τη μέθοδο των μετακινήσεων όπου το πρόβλημα απλοποιείται λόγω άπειρης δυσκαμψίας του ζυγώματος (I_∞). Συνολικά, στη γενική περίπτωση, οι άγνωστες μετακινήσεις είναι: $\varphi_{A'}$, $\varphi_{B'}$, $u_{A'}$, $u_{B'}$, $u_{A''}$, $u_{B''}$. Στην περίπτωση του παραδείγματος, λόγω άπειρης δυστένειας ($EA=\infty$) σε όλο το πλαίσιο και άπειρης δυσκαμψίας ($EI=\infty$) στο ζύγωμα, ισχύει: $u_{A''}=u_{B''}=\Delta$, $u_{A'}=u_{B'}=0$ και $\varphi_{A'}=\varphi_{B'}=0$, όπου u και u είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη μετακίνηση των A', B'.

Συμβολίζουμε με Δ την κοινή οριζόντια μετακίνηση των A', B'.



Σχ. 1.26: Παραμόρφωση του επιπέδου πλαισίου

Από την ελαστική γραμμή του πλαισίου (Σχήμα 1,26) συμπεραίνουμε ότι τα υποστυλώματα συμπεριφέρονται ως αμφίπακτα με αίτιο την υποχώρηση (μετακίνηση) της κεφαλής των κατά Δ . Η λύση είναι γνωστή και ανακτάται από πίνακες.

Οι ροπές και οι τέμνουσες εκφράζονται συναρτήσει του Δ .

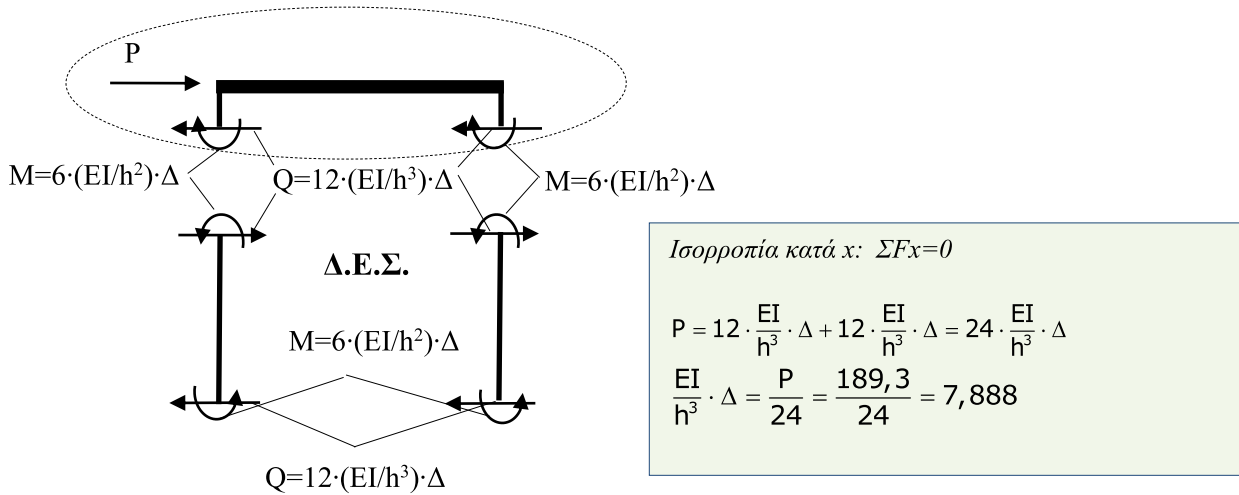
Η λύση είναι γνωστή και αντλείται από τους πίνακες π.χ. του Beton kalender.

Στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος του σχήματος 1,27 εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας κατά x:

Ισορροπία κατά x: $\Sigma F_x=0$

$$P = 12 \cdot \frac{EI}{h^3} \cdot \Delta + 12 \cdot \frac{EI}{h^3} \cdot \Delta = 24 \cdot \frac{EI}{h^3} \cdot \Delta$$

$$\frac{EI}{h^3} \cdot \Delta = \frac{P}{24} = \frac{189,3}{24} = 7,888$$



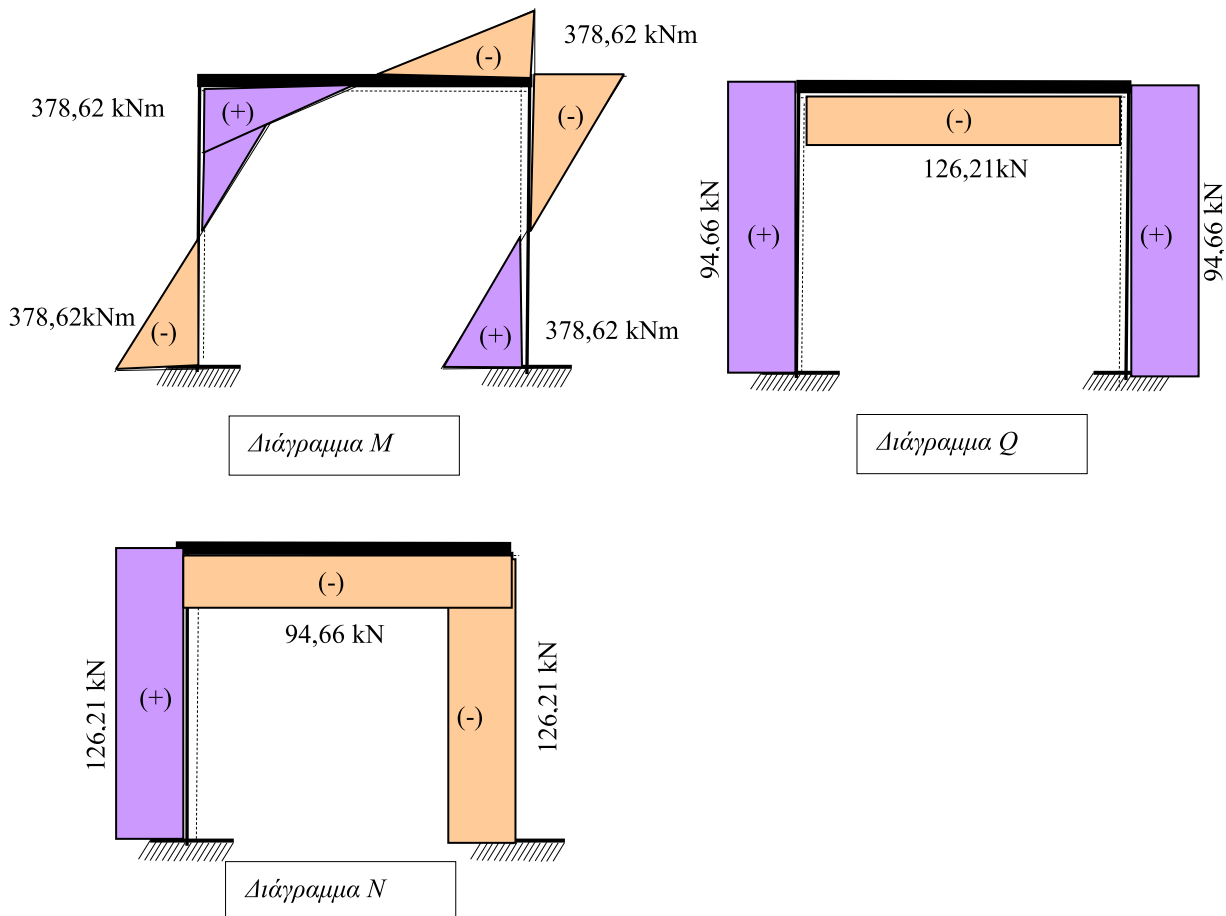
Σχ. 1.27: Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος

$$M_{(AA')} = M_{(A'A)} = M_{(BB')} = M_{(B'B)} = 6 \cdot 7,888 \cdot h = 6 \cdot 7,958 \cdot 8 = 378,62 \text{ kNm}$$

$$Q_{(AA')} = Q_{(A'A)} = Q_{(BB')} = Q_{(B'B)} = 12 \cdot 7,888 = 94,66 \text{ kN}$$

Τέλος, με $I = b \cdot h^3 / 12 = 0,60^4 / 12 = 0,0108 \text{ m}^4$ και $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, η οριζόντια μετακίνηση Δ του ζυγώματος βρίσκεται ίση με:

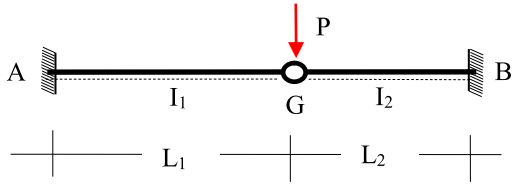
$$\Delta = \frac{7,958 \cdot h^3}{EI} = \frac{7,888 \cdot 8^3}{21 \cdot 10^6 \cdot 0,0108} = 0,01781 \text{ m} = 1,78 \text{ cm}$$



Σχ. 1.28: Παράδειγμα 1.3 - Διαγράμματα M-Q-N λόγω σεισμικής «φόρτισης»

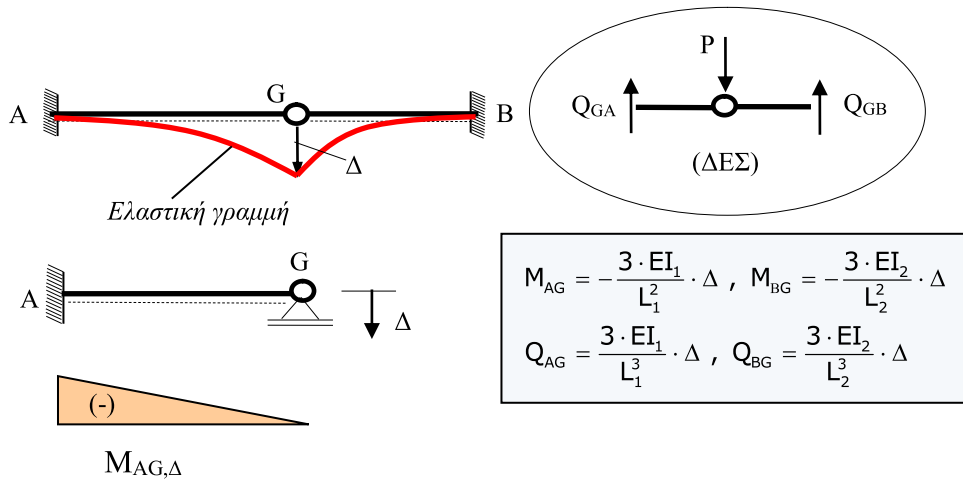
Παράδειγμα 1.4: Αμφίπακτη δοκός με ενδιάμεση άρθρωση

Στην ενδιάμεση άρθρωση της δοκού του σχήματος 1.29 ασκείται μια δύναμη P.



Σχ. 1.29: Παράδειγμα 1.4

Η δύναμη P προκαλεί μετακίνηση του σημείου G κατά Δ. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με δύο μονόπακτες δοκούς AG και BG των οποίων η κοινή στήριξη G υποχωρεί κατά Δ, συνεπώς παραπέμπεται σε γνωστή λύση (π.χ. από πίνακες): Δύο μονόπακτες δοκοί AG και BG με αίτιο την κοινή υποχώρηση του G κατά Δ.



Σχ. 1.30: Παράδειγμα 1.4 – αμφίπακτη δοκός με ενδιάμεση άρθρωση

Διάγραμμα ελευθέρου σώματος: ΣΥ=0

$$Q_{GA} + Q_{GB} - P = 0 \Rightarrow \frac{3 \cdot EI_1}{L_1^3} \cdot \Delta + \frac{3 \cdot EI_2}{L_2^3} \cdot \Delta - P = 0$$

$$\Delta = \frac{P}{3 \cdot E \cdot \left(\frac{I_1}{L_1^3} + \frac{I_2}{L_2^3} \right)}$$

Εάν ορίσουμε $\kappa = I_1/I_2$ τον λόγο των ροπών αδρανείας των δύο τμημάτων, οι ροπές και οι τέμνουσες εκφράζονται συναρτήσει του Δ και συνακόλουθα του P ως εξής:

$$M_{AG} = -3 \cdot \frac{EI_1}{L_1^2} \cdot \frac{P}{3 \cdot E \cdot \left(\frac{I_1}{L_1^3} + \frac{I_2}{L_2^3} \right)} = -\frac{P \cdot I_1}{L_1^2 \cdot \left(\frac{I_1}{L_1^3} + \frac{I_2}{L_2^3} \right)} = -\frac{P \cdot \kappa}{L_1^2 \cdot \left(\frac{\kappa}{L_1^3} + \frac{1}{L_2^3} \right)}$$

$$M_{BG} = -3 \cdot \frac{EI_2}{L_2^2} \cdot \frac{P}{3 \cdot E \cdot \left(\frac{I_1}{L_1^3} + \frac{I_2}{L_2^3} \right)} = -\frac{P \cdot I_2}{L_2^2 \cdot \left(\frac{I_1}{L_1^3} + \frac{I_2}{L_2^3} \right)} = -\frac{P}{L_2^2 \cdot \left(\frac{\kappa}{L_1^3} + \frac{1}{L_2^3} \right)}$$

$$Q_{AG} = \frac{M_{AG}}{L_1} = \frac{P \cdot \kappa}{L_1^3 \cdot \left(\frac{\kappa}{L_1^3} + \frac{1}{L_2^3} \right)}$$

$$Q_{BG} = \frac{M_{BG}}{L_2} = \frac{P \cdot \kappa}{L_2^3 \cdot \left(\frac{\kappa}{L_1^3} + \frac{1}{L_2^3} \right)}$$

Εφαρμογή:

$L_1=5,0 \text{ m}$, $L_2=2,5 \text{ m}$, $P=100 \text{ kN}$, $I_1=60.000 \text{ cm}^4$, $I_2=30.000 \text{ cm}^4$,
 $E=21 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\kappa=60.000/30.000=2$

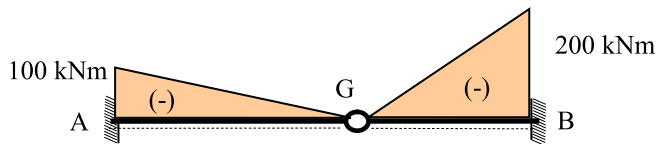
$$M_{AG} = -\frac{P \cdot \kappa}{L_1^2 \cdot \left(\frac{\kappa}{L_1^3} + \frac{1}{L_2^3}\right)} = -\frac{100 \cdot 2}{5^2 \cdot \left(\frac{2}{5^3} + \frac{1}{2,5^3}\right)} = -\frac{200}{2} = -100 \text{ kNm}$$

$$M_{BG} = -\frac{P}{L_2^2 \cdot \left(\frac{\kappa}{L_1^3} + \frac{1}{L_2^3}\right)} = -\frac{100}{2,5^2 \cdot \left(\frac{2}{5^3} + \frac{1}{2,5^3}\right)} = -200 \text{ kNm}$$

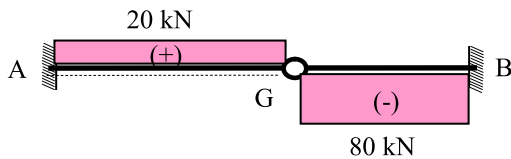
$$Q_{AG} = \frac{M_{AG}}{L_1} = \frac{100}{5} = 20 \text{ kN}$$

$$Q_{BG} = \frac{M_{BG}}{L_2} = \frac{200}{2,5} = 80 \text{ kN}$$

$$\Delta = \frac{P}{3E \cdot \left(\frac{I_1}{L_1^3} + \frac{I_2}{L_2^3}\right)} = \frac{100}{3 \cdot 21 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{60.000}{5^3} + \frac{30.000}{2,5^3}\right) \cdot 10^{-8}} = 6,614 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 6,614 \text{ mm}$$



Διάγραμμα M



Διάγραμμα Q

Σχ. 1.31: Παράδειγμα 1.4 – Διαγράμματα M-Q

1.8 Το μονόκομβο πάγιο πλαίσιο ($EA=\infty$) -Τα βήματα της μεθόδου μετακινήσεων

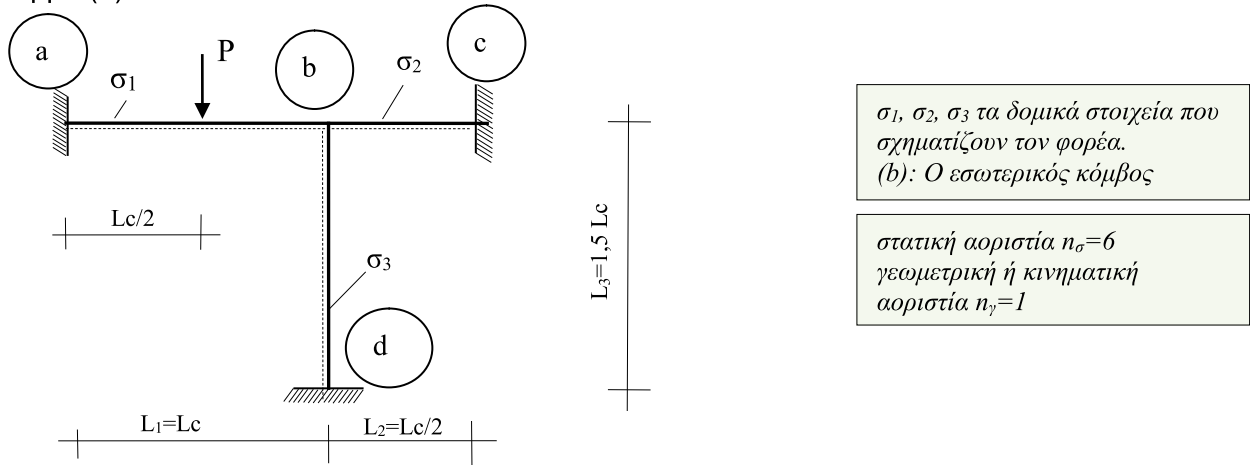
Εξετάζεται κατ' αρχήν ένας ατελής φορέας που διαθέτει έναν και μοναδικό εσωτερικό κόμβο (σχήμα 1.32). Λόγω άπειρης δυστένειας όλων των στοιχείων του φορέα ($EA=\infty$) και πεπερασμένης δυσκαμψίας EI , ο εσωτερικός κόμβος (b) μπορεί να στραφεί κατά γωνία φ_b , δεν μπορεί όμως να μετακινηθεί ούτε οριζοντίως ούτε κατακορύφως. Αυτού του είδους οι φορείς ονομάζονται **πάγιοι**. Αναλυτικά θα αναφερθούμε στο τρίτο κεφάλαιο.

Πάγιος φορέας, $EA=\infty$, $EI=EI_c$ =σταθερό

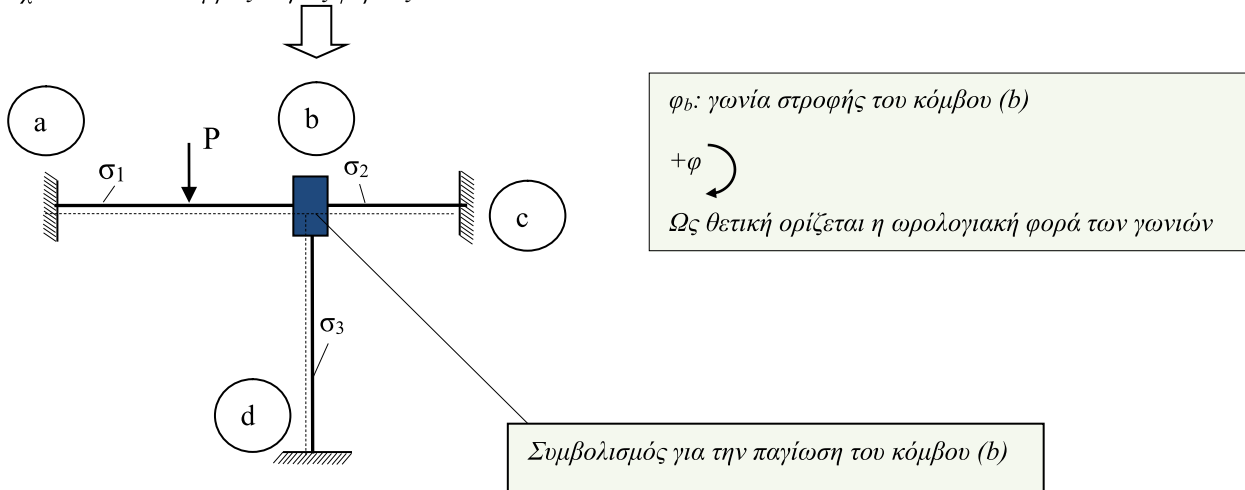
Η στατική αοριστία του φορέα είναι (6), επομένως η επίλυση με τη μέθοδο των δυνάμεων θα καταλήξει σε ένα σύστημα (6) εξισώσεων με (6) αγνώστους, διαδικασία αρκετά επίπονη και χρονοβόρα. Αντιθέτως, με τη μέθοδο των μετακινήσεων το μοναδικό άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος που πρέπει να υπολογιστεί είναι η γωνία στροφής φ_b του κόμβου (b).

Εάν παγιώσουμε τον κόμβο (b), δηλαδή με κάποιον τρόπο μηδενίσουμε τη γωνία στροφής φ_b εμποδίζοντας τον κόμβο (b) να στραφεί, προκύπτει ο **παγιωμένος φορέας**, δηλαδή ο φορέας ο οποίος προκύπτει από τον αρχικό με την προσθήκη ενός μηχανισμού που μηδενίζει το άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος. Ο μηχανισμός αυτός παγίωσης του κόμβου (b) συμβολίζεται με το ολόσωμο τετραγωνάκι. Έτσι προκύπτει το κινηματικό ή **γεωμετρικό κύριο σύστημα (ΓΚΣ)**, κατ' αντιστοιχία

του Κύριου Ισοστατικού Συστήματος (ΚΙΣ). Η διαφορά είναι ότι το ΚΙΣ στη μέθοδο των δυνάμεων προκύπτει αφαιρητικά, αφαιρώντας από τον αρχικό φορέα τόσες δεσμικές ράβδους όσες είναι και ο βαθμός στατικής αοριστίας, στη μέθοδο των μετακινήσεων το ΓΚΣ προκύπτει από τον αρχικό φορέα προσθετικά, προσθέτοντας τόσες δεσμικές ράβδους όσες είναι και ο βαθμός γεωμετρικής αοριστίας. Στην περίπτωση του παραδείγματός που εξετάζουμε, προσθέτουμε μια πάκτωση στον κόμβο (b).

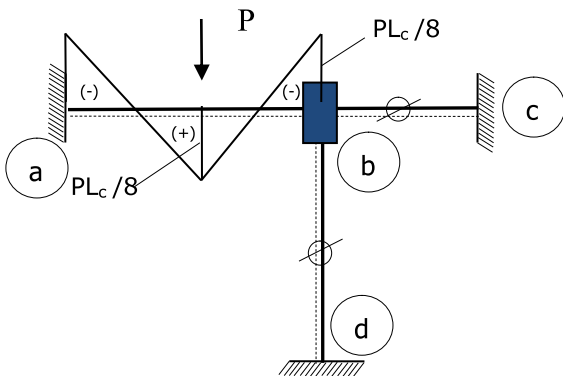


Σχ. 1.32: Μονόκομβος πάγιος φορέας



Σχ. 1.33: Το κινηματικό (γεωμετρικό) κύριο σύστημα (ΓΚΣ) - Ο παγιωμένος Φορέας

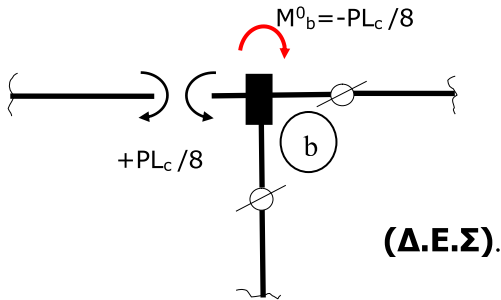
1ο βήμα: Ο φορέας παγιώνεται και προκύπτει το κινηματικό κύριο σύστημα. Η παγίωση επιτυγχάνεται με την πάκτωση του εσωτερικού κόμβου (b) όπως φαίνεται στο σχήμα 1.33. Ο κόμβος (b) θεωρείται πλέον ότι είναι άστρεπτος ($\varphi_b=0$) και τα δομικά στοιχεία $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ λειτουργούν ως αμφίπακτες δοκοί.



Σχ. 1.34 : Διάγραμμα ροπών M^0 λόγω P στον παγιωμένο φορέα

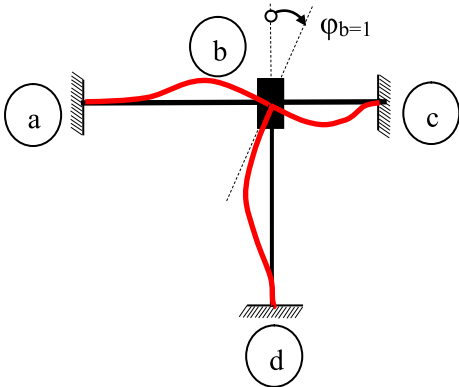
Λόγω της παγίωσης του κόμβου (b), τα μη φορτιζόμενα δομικά στοιχεία δεν επηρεάζονται από τα φορτιζόμενα. Υπολογίζονται οι ροπές στο φορτιζόμενο στοιχείο (ab) π.χ. από πίνακες. Πρόκειται για αμφίπακτη δοκό με συγκεντρωμένη δύναμη στη μέση. Τα αφόρτιστα στοιχεία (bc) και (bd) δεν έχουν ένταση.

2ο βήμα: Επιβολή της ροπής πάκτωσης $M_b^0 = -PL_c/8$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.35 (αντίθετα από την ροπή $M_{ba} = PL_c/8$). Υποθετική ροπή στον κόμβο (b) ώστε αφ' ενός να εξασφαλίζεται ισορροπία (αρχή της αποδέσμευσης), αφ' ετέρου να ισχύει $\phi_b = 0$



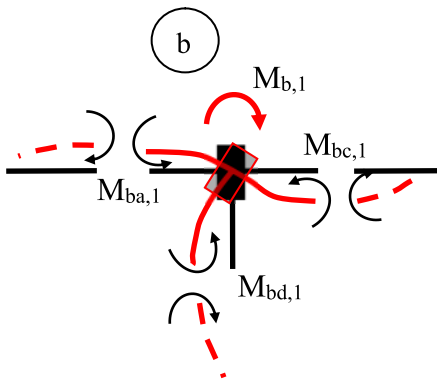
Σχ. 1.35 : Ισορροπία στο ΔΕΣ

3ο βήμα: Μοναδιαία κατάσταση. Στην περίπτωση του παραδείγματος η στροφή του κόμβου (b) κατά $\phi_b = "1"$ rad ως πρόσθετη «φόρτιση» Πρόκειται για την περίπτωση καταναγκασμένης στροφής πάκτωσης κατά "1" rad.



Ελαστική γραμμή του παγιωμένου φορέα λόγω στροφής της πάκτωσης (b) κατά $\phi_b = "1"$

Σχ. 1.36 : Κατάσταση $\phi_b = \mu_1 = "1"$



Σχ. 1.37 : Ισορροπία κόμβου

Επιβολή στον κόμβο (b) της υποθετικής ροπής πάκτωσης $M_{b,1}$ που είναι απαραίτητη προκειμένου

να εξασφαλιστεί η ισορροπία του κόμβου b λόγω $\varphi_b=1$.

$$M_{b,1} = M_{ba,1} + M_{bc,1} + M_{bd,1} \quad (1.8-1)$$

$M_{ba,1}$, $M_{bc,1}$, $M_{bd,1}$ είναι οι γνωστές ροπές πάκτωσης που ανακτώνται από τα αντίστοιχα δομικά στοιχεία (b-a), ((b-c) και (b-d) [περίπτωση αμφίπακτης δοκού με αίτιο την μοναδιαία στροφή της πάκτωσης (b) (από πίνακες)].

$$M_{ba,1} = \frac{4 \cdot E \cdot I_c}{L_c} \cdot (\varphi_b = 1) = \frac{4 \cdot E \cdot I_c}{L_c}$$

$$M_{bc,1} = \frac{4 \cdot E \cdot I_c}{0,5 \cdot L_c} \cdot (\varphi_b = 1) = \frac{8 \cdot E \cdot I_c}{L_c}$$

$$M_{bd,1} = \frac{4 \cdot E \cdot I_c}{1,5 \cdot L_c} \cdot (\varphi_b = 1) = \frac{8 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot L_c}$$

$$(1.8-2)$$

4ο βήμα: Συμβιβαστότητα (συνθήκη συμβιβαστού) μεταξύ του πραγματικού (αρχικού) και του παγιωμένου φορέα. Το άθροισμα των υποθετικών ροπών πάκτωσης του κόμβου (b) πρέπει να μηδενίζεται (διότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχει πάκτωση στο (b))

$$M_b^0 + (M_{ba,1} + M_{bc,1} + M_{bd,1}) \cdot \varphi_b = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_b = -\frac{M_b^0}{M_{ba,1} + M_{bc,1} + M_{bd,1}} = -\frac{\frac{P \cdot l_c}{8}}{\frac{4E \cdot I_c}{l_c} + \frac{8E \cdot I_c}{l_c} + \frac{8E \cdot I_c}{3 \cdot l_c}} = -\frac{\frac{P \cdot l_c}{8}}{\frac{12 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot l_c} + \frac{24 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot l_c} + \frac{8E \cdot I_c}{3 \cdot l_c}} = -\frac{3 \cdot P \cdot l_c^2}{352 \cdot E \cdot I_c} \quad (1.8-3)$$

Τελικές ροπές :

$$M_{ba} = M_{ba}^0 + M_{ba}(\varphi) = P \cdot l_c / 8 + \frac{4 \cdot E \cdot I_c}{l_c} \cdot \left(-\frac{3 \cdot P \cdot l_c^2}{352 \cdot E \cdot I_c}\right) = \frac{4}{44} \cdot P \cdot l_c$$

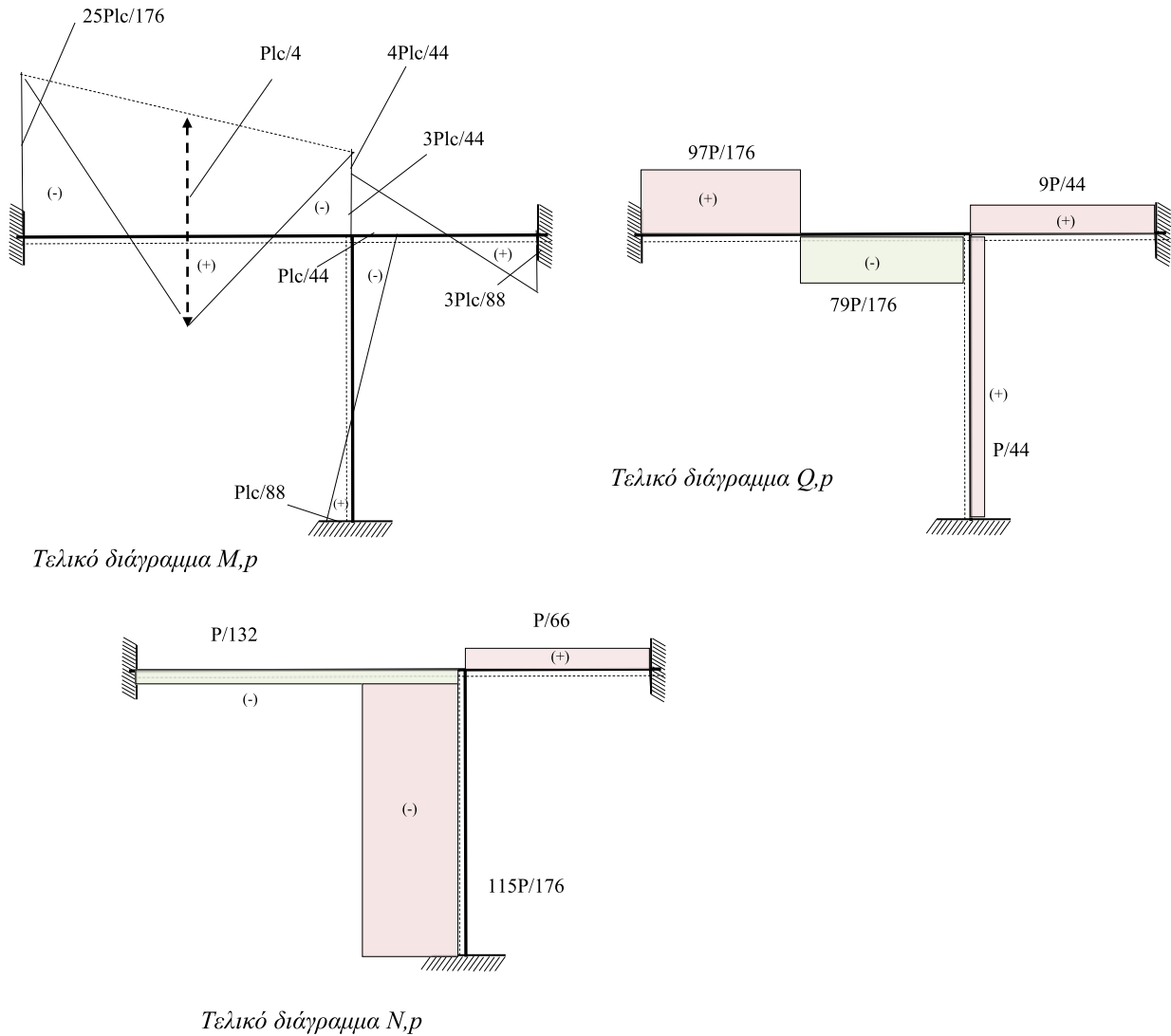
$$M_{bc} = M_{bc}^0 + M_{bc}(\varphi) = 0 + \frac{8 \cdot E \cdot I_c}{l_c} \cdot \left(-\frac{3 \cdot P \cdot l_c^2}{352 \cdot E \cdot I_c}\right) = -\frac{3}{44} \cdot P \cdot l_c$$

$$M_{bd} = M_{bd}^0 + M_{bd}(\varphi) = 0 + \frac{8 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot l_c} \cdot \left(-\frac{3 \cdot P \cdot l_c^2}{352 \cdot E \cdot I_c}\right) = -\frac{1}{44} \cdot P \cdot l_c$$

$$M_{ab} = M_{ab}^0 + M_{ab}(\varphi) = -P \cdot l_c / 8 + \frac{2 \cdot E \cdot I_c}{l_c} \cdot \left(-\frac{3 \cdot P \cdot l_c^2}{352 \cdot E \cdot I_c}\right) = -\frac{25}{176} \cdot P \cdot l_c$$

$$M_{cb} = M_{cb}^0 + M_{cb}(\varphi) = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I_c}{l_c} \cdot \left(-\frac{3 \cdot P \cdot l_c^2}{352 \cdot E \cdot I_c}\right) = -\frac{3}{88} \cdot P \cdot l_c$$

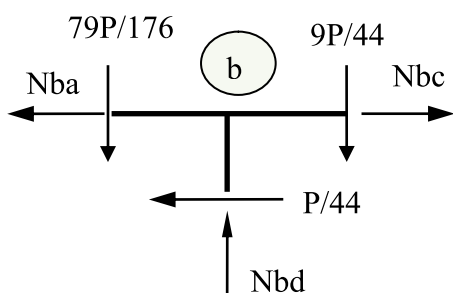
$$M_{db} = M_{db}^0 + M_{db}(\varphi) = 0 + \frac{4 \cdot E \cdot I_c}{3 \cdot l_c} \cdot \left(-\frac{3 \cdot P \cdot l_c^2}{352 \cdot E \cdot I_c}\right) = -\frac{1}{88} \cdot P \cdot l_c$$



Σχ. 1.38 : Διαγράμματα $M-Q-N$

Υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων:

Είναι ήδη γνωστές οι τέμνουσες Q_{ba} , Q_{bc} και Q_{bd} των στοιχείων που συντρέχουν στον κόμβο (b). Για τον υπολογισμό των αντίστοιχων αξονικών δυνάμεων N_{ba} , N_{bc} και N_{bd} δεν αρκούν οι δύο εξισώσεις $\Sigma x_b=0$ και $\Sigma y_b=0$. Απαιτείται και μια τρίτη εξίσωση από τον νόμο του **Hooke**: $\Delta L_{ba} = -\Delta L_{bc}$ λόγω άπειρης δυστένειας.



$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow N_{bd} = \frac{79}{176} \cdot P + \frac{9}{44} \cdot P = \frac{115}{176} \cdot P$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow N_{ba} + \frac{P}{44} - N_{bc} = 0$$

$$\text{Hooke : } N_{ba} \cdot \frac{L_{ba}}{EA_{ba}} = -N_{bc} \cdot \frac{L_{bc}}{EA_{bc}}$$

$$N_{ba} \cdot L_c = -N_{bc} \cdot 0,5 \cdot L_c \Rightarrow N_{ba} = -0,5 \cdot N_{bc}$$

$$N_{bc} = \frac{P}{66}, N_{ba} = -\frac{P}{132}$$